

# 船舶の航海最適化技術の精密化と オンボード航海支援装置への適用のための処理効率化

金丸 英幸<sup>\*1</sup>

## Improvement of Navigation Optimization Technologies and Effective Data Processing for On-Board Control Equipment

KANAMARU Hideyuki

### Summary

Recently, air-pollution caused by ships' ocean navigation is the object of attention and efforts to reduce exhaust gases in fields such as new hull design, development of effective engines and so on.

In this paper, the optimum navigation control technology is improved for the purpose of exhaust gas reduction by optimizing steering control and adjustment of main engine outputs to analyze main engine fuel-oil consumption under forecasts of sea conditions more precisely than the preceding study<sup>1)</sup>.

Moreover, the most suitable solution is presented for application to the real-time navigation control system on-board.

**Keywords :** ( optimam navigation, steering control, main engine output, fuel consumption )

### 1. 緒言

近年、陸上では車の自動運転技術の開発が精力的に進められている。一方、海上交通では船舶の排ガスによる大気汚染が問題視されており<sup>2)</sup>、抵抗が小さい船型の研究や高効率の船用機関の開発等、様々な分野で技術開発の努力が続けられている。この様なハードウェア開発とは別に、既存の船舶の運航技術の最適化により、航海で消費される燃料を最小化することも、船舶の排ガスによる環境汚染問題を解決する手段の一つと考えられる。

筆者<sup>1)</sup>は、過去に、航路や海象条件に基づいて就航海域を離散化し航路を航路要素に分割した上で、船舶の主要目や主機関の特性、载荷状態等の運航条件から

航海の燃料消費量を解析し定式化した。但し、解析の過程で、V L C C等の大型船への適用を前提に、後述する近似的な条件に基づいて燃料消費量を導いた。

本稿では、この近似を極力排除した精密な解析によって、燃料消費量定式化の精度向上を目指す。さらに、近似解法と精密解法の両方に対して定式化された各々の燃料消費量を評価基準として、操舵制御と主機出力(速力)調整を最適化する技術を導くと共に、両解法の長所を兼ね備えた準精密解法を提案する。最後に、精度が高い精密解法の評価基準に基づいて、各々の解法による最適化の結果と演算量(処理時間)を比較し、それらの優劣を明らかにする。また、その結果に基づいて近似解法の精度の評価と実用性の検証を行う。

<sup>\*1</sup> 大学院(新技術創成研究所)非常勤講師(客員研究員)

尚、本稿では、議論の複雑化を回避するために、船舶の対水運動のみを解析の対象とし、海流や潮流を考慮した対地運動については対応方法の方向付けに止めた。

## 2. 燃料消費量解析の基礎

### 2.1 航海モデル

航海における燃料消費量解析のために、以下の3通りの航海モデルを定義する。

#### (1) 理想航海 (架空)

『完全静水中で、操舵制御を行わなくても船首揺を生じず、設定された針路を維持して直進する航海』

理想航海の船速を  $u$  とすると、 $u$  は速力に相当し、主機出力の指標となるパラメータと考えることができる。理想航海の航海時間を  $T$  で表す。

#### (2) 基準航海 (架空)

『波浪の中で、操舵制御を行わなくても船首揺を生じず、設定された針路を維持して直進する航海』

基準航海の船速を  $u^\#$  とすると、 $u^\#$  は波浪による抵抗で減速された船速で、自然減速係数  $\alpha$  を用いて以下の通り表される。

$$u^\# = \alpha u \quad , \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (1)$$

また、基準航海の航海時間を  $T^\#$  で表すと、

$$T^\# = \frac{T}{\alpha} \quad (2)$$

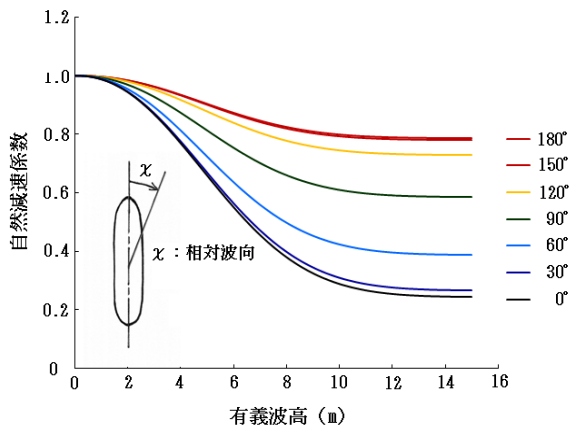


Fig.1 自然減速係数

となる。

自然減速係数  $\alpha$  の特性曲線を Fig.1 に例示する。

#### (3) 実航海

『波浪の中で操縦運動を伴いながら基準航海の船速  $u^\#$  で進む航海』

実航海の航海時間を  $T^*$  で表す。

### 2.2 推進運動モデル

実航海における推進運動は以下の運動方程式で表され、船舶の航海最適化の基礎となる。

$$(m_0 + m_x) \dot{u}^\# - (m_0 + m_y) vr = T_p^* (1 - t_p^*) - C_h^\# u^{\#2} - C_\delta u^{\#2} \delta^2 - R_w \quad (3)$$

ここに、

$r$  : 回頭角速度、 $v$  : 横流れ速度

$\delta$  : 舵角、 $R_w$  : 波浪抵抗

$m_0$  : 質量、 $m_x, m_y$  : 付加質量

$T_p$  : スラスト、 $t_p$  : スラスト減少率

で、船体抵抗係数  $C_h$  と舵抵抗係数  $C_\delta$  は次式で与えられる<sup>3)</sup>。尚、 $C_h^\#$  は実航海 (基準航海) 対応の  $C_h$  を、 $T_p^*$  と  $t_p^*$  は実航海対応の  $T_p$  と  $t_p$  を表す。

$$C_h = \frac{\nabla_a^{2/3}}{C_{ad}} \quad (4)$$

$\nabla_a$  : 排水容積、 $C_{ad}$  : アドミラルティ係数

$$C_\delta = \frac{\rho}{2} (1 - \omega)^2 (1 + 3.6 s_p^{1.5}) A_R \frac{6.13 \lambda_R}{\lambda_R + 2.25} \quad (5)$$

$$s_p = 1 - \frac{u^\#(1 - \omega)}{np} = 1 - \frac{\alpha u(1 - \omega)}{np} \quad (6)$$

$s_p$  : スリップ比

$\rho$  : 海水密度、 $\omega$  : 伴流係数

$A_R$  : 舵面積、 $\lambda_R$  : 舵アスペクト比

基準航海および理想航海では操縦運動に伴う抵抗を受けないので、それぞれ以下の推進運動方程式となる。

$T_p^\#$  と  $t_p^\#$  は基準航海対応の  $T_p$  と  $t_p$  である。

$$(m_0 + m_x)\dot{u}^\# = T_p^\#(1 - t_p^\#) - C_h^\#u^{\#2} - R_w \quad (7)$$

$$(m_0 + m_x)\dot{u} = T_p(1 - t_p) - C_h u^2 \quad (8)$$

### 2.3 燃料消費量の定式化

操船の現場では一定の距離を主機出力一定で航行するのが通例であるため、速力  $u$  は定数 ( $U$ ) として扱うことができる。その結果、(3)、(7)式左辺の  $\dot{u}^\#$ 、 $\dot{u}$  の項が消え、スラストと抵抗の釣り合いの式と実航海における推進のための有効馬力  $E_{hp}$  が得られる<sup>4),5)</sup>。

$$T_p^\#(1 - t_p^\#) = R \quad (9)$$

$$R = C_h^\#U^{\#2} + (m_0 + m_y)vr + C_\delta U^{\#2}\delta^2 + R_w \quad (10)$$

$$E_{hp} = RU^\# = T_p^\#(1 - t_p^\#)U^\# \quad (11)$$

また、動力源である主機関の制動馬力  $B_{hp}$  と有効馬力  $E_{hp}$  の間には、伝達効率  $\eta_t$  および推進効率  $\eta_p$  を用いて、以下の関係が成り立つ<sup>5)</sup>。

$$E_{hp} = \eta_t \eta_p B_{hp} \quad (12)$$

一方、航路  $\sigma$  を航行中の累積燃料消費量  $F_\sigma$  は制動馬力と主機関の燃費特性  $\gamma$  を用いて次式で与えられる。

$$F_\sigma = \int_0^t \gamma B_{hp} dt \quad (13)$$

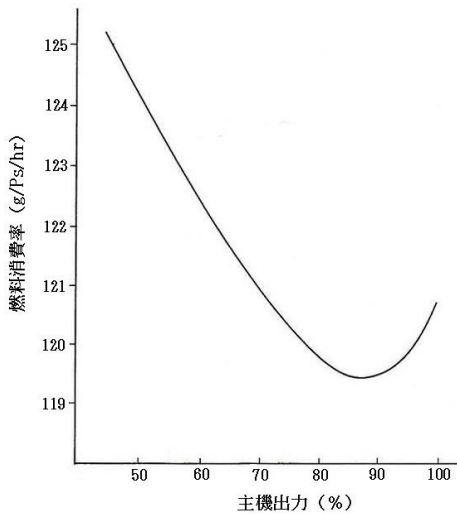


Fig.2 主機燃費特性

$\gamma$  は制動馬力、即ち速力  $U$  に依存する。その特性曲線を Fig.2 に例示する。

ここで横流れ速度  $v$  に代えて横流れ角  $\beta$

$$\beta = -\frac{v}{U} \quad (14)$$

を用いると、(3)式および(9)～(14)式から実航海における燃料消費量が以下の通り定式化される。

$$\begin{aligned} F_\sigma^\# &= \int_0^t \gamma^* T_p^\#(1 - t_p^\#)U^\# dt \\ &= \int_0^t \gamma^* \{C_h^\#U^{\#3} + (m_0 + m_y)U^{\#2}\beta \\ &\quad + C_\delta U^{\#3}\delta^2 + R_w U^\#\} dt \end{aligned} \quad (15)$$

但し、 $\gamma^*$  は伝達効率  $\eta_t$  と推進効率  $\eta_p$  で補正した燃費特性である。

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{\eta_t \eta_p} \quad (16)$$

基準航海では、理想航海時と同じ主機出力で波浪による抵抗を受けて船速が低下する（自然減速）ことを考慮すると、(7)、(8)式からそれぞれの航海における燃料消費量が以下の通り求められる。

$$F_\sigma^\# = \int_0^t \gamma^* (C_h^\#U^{\#2}U + R_w U) dt \quad (17)$$

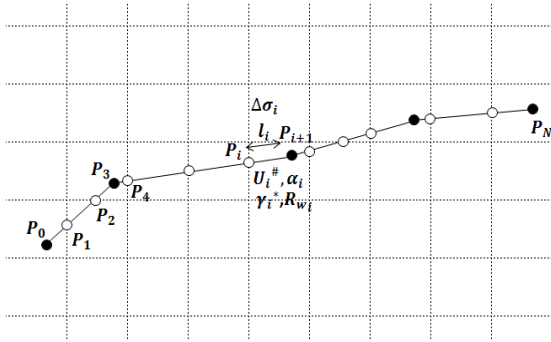
$$F_\sigma = \int_0^t \gamma^* C_h U^3 dt \quad (18)$$

### 2.4 航海の離散化

#### 2.4.1 就航環境の離散化

波浪等の海象予報データは、陸上の気象海象予報データサービス機関から経緯度方向の矩形の海域毎に入手することができる。その結果、航路とその境界線の交点の前後で海象データが切り替わり、さらに、船舶が変針点に到達して針路が変わると、その時点で相対波向も変化する。

Fig.3 に示す通り、設定された航路  $\sigma$  を、航路と海象の相対的な関係が変わる点  $P_i$  を両端とする線分（以後、航路要素  $\Delta\sigma_i$  と呼ぶ）に分割すると、航路



$l_i$  : 航路要素長( $P_i \rightarrow P_{i+1}$ )     $\gamma_i^*$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の燃料消費  
 $U_i^\#$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の船速                       $R_{wi}$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の波浪抵抗  
 $\alpha_i$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の自然減速係数

Fig.3 航路要素

要素の接続によって航路全体が構成され、各々の航路要素内では就航条件が一定となる。

したがって、航路要素  $\Delta\sigma_i$  上では主機出力（速力）一定で船を進めることにすれば、自然減速係数  $\alpha_i$ 、また、波浪抵抗  $R_{wi}$  も一定となり、航路要素を基本単位として航海最適化を図ることが可能となる。

尚、気象海象データは、船上においても陸上のデータサービス機関から通信衛星を経由して、デジタルデータとして入手することができる。

### 2.4.2 燃料消費量の離散化

航路  $\sigma$  は航路要素  $\Delta\sigma_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) の接続集合体である。したがって、 $\Delta\sigma_i$  を航行する時間の区間を  $[t_i, t_{i+1}]$  とすると、実航海における総燃料消費量が航路要素毎の燃料消費量の和として与えられる。

$$F_{\sigma}^* = \sum \int_0^{T_i^*} \gamma^* \{ C_h^\# U^{\#3} + (m_0 + m_y) U^{\#2} \beta + C_\delta U^{\#3} \delta^2 + R_w U^\# \} dt \quad (19)$$

$$T_i^* = t_{i+1} - t_i \quad (20)$$

## 3. 近似解析による燃料消費量定式化の概説<sup>1)</sup>

船舶の運航においては安全性の確保が最優先事項であるため、航行の安全が阻害される荒天下の航海は燃料（エネルギー）消費量削減のための最適化の対象か

ら除外する。先行研究<sup>1)</sup>では基準航海と理想航海を区別せず、大型船を前提としてビューフォート風力階級6以下という条件を付し、さらに、実海域の航海では同じ主機出力の下で理想航海の船速が波浪抵抗を受けて減速されることに着目して

$$\int_0^{T_i^\#} \gamma^* (C_h^\# U^{\#3} + R_w U^\#) dt \approx \int_0^{T_i^\#} \gamma^* C_h U^3 dt \quad (21)$$

$$\frac{R_w/(\alpha U)^2 \cdot \Delta T_i^*}{C_h} \ll 1 \quad (22)$$

$$C_{ad}, s_p \approx \text{const.} \quad (23)$$

という3通りの近似、および

$$\frac{\Delta T_i^*}{T_i^\#} = \frac{1}{T_i^\#} \int_0^{T_i^\#} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \quad (24)$$

$$\Delta\psi = \psi - \psi_s \quad : \text{針路偏差} \quad (25)$$

$\psi$  : 針路

$\psi_s$  : 設定針路

$$\Delta T_i^* = T_i^* - T_i^\#$$

という関係<sup>6)</sup>を用い、さらに、操縦運動の状態量や関係する物理量の無次元化を組み合わせ、第一評価関数  $J_{1i}$  を組み込む形で燃料消費量（第二評価関数  $J_2$ ）を以下の通り定式化した<sup>1)</sup>。尚、第一評価関数の変数やパラメータの右肩の「 $\prime$ 」は無次元量を意味する。

$$J_{1i} = \int_0^\infty \left( \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} + \frac{(m'_0 + m'_y)\beta r' + C_{\delta i} \delta'^2}{C_{h i}'} \right) dt' \quad (26)$$

$$J_2 = \sum \{ \gamma_i^* C_{h i} U_i^2 (l_i + \alpha_i^2 L J_{1i}) \} \quad (27)$$

$l_i$  : 航路要素  $\Delta\sigma_i$  の航路長

$L$  : 船体長

第一評価関数  $J_{1i}$  は関係する状態量が無次元化されているために船速  $U_i$  に依存せず、その最適化の確定値を用いて第二評価関数  $J_2$  を最適化することが可能となる（評価関数の分解）<sup>1)</sup>。この性質により、後述する航海最適化の収束計算の処理が大幅に軽減される。本解法を近似解法と称する。

#### 4. 精密解析による燃料消費量定式化

理想航海に対する基準航海の船速低下を主機出力の視点で考えると、次式が成り立つ。

$$F_{\sigma}^{\#} = \int_0^t \gamma^* T_p^{\#} (1 - t_p^{\#}) U dt = \int_0^t E_{hp} U dt = F_{\sigma} \quad (28)$$

$U$  が定数であることを考慮して(7)、(8)式を馬力変換し燃料消費率をかけると、それぞれの燃料消費量が

$$F_{\sigma}^{\#} = \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} \gamma^* (C_h^{\#} U^{\#2} U + R_w U) dt \quad (29)$$

$$F_{\sigma} = \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} \gamma^* C_h U^3 dt \quad (30)$$

と表される。したがって、(1)式の適用により、航路要素  $\Delta\sigma_i$  上では近似式(21)に代えて次式が成り立つ。

$$\int_0^{T_i} \frac{\gamma^*}{\alpha} (C_h^{\#} U^{\#3} + R_w U^{\#}) dt = \int_0^{T_i} \gamma^* C_h U^3 dt \quad (31)$$

航路要素  $\Delta\sigma_i$  上では、自然減速係数  $\alpha$  や波浪抵抗  $R_w$  が一定であることから(31)式の被積分関数が定数となり、(1)、(2)式を考慮すると次式が得られる。

$$\gamma^* (C_h^{\#} U_i^{\#3} + R_w U_i^{\#}) T_i^{\#} = \gamma^* C_h U_i^3 T_i \quad (32)$$

$$C_h^{\#} (\alpha_i U_i)^2 + R_w = C_h U_i^2 \quad (33)$$

さらに、(33)式を整理することによって(22)式の近似が排除され、これらの状態量の関係が厳密に導かれる。

$$\frac{C_h^{\#}}{C_h} + \frac{R_w / (\alpha_i U_i)^2}{C_h} = \frac{1}{\alpha^2} \quad (34)$$

理想航海、基準航海および実航海の時間差を

$$\Delta T_i^{\#} = T_i^{\#} - T_i \quad (35)$$

$$\Delta T_i^* = T_i^* - T_i^{\#} \quad (36)$$

と定義し、(32)、(34)および(24)式を用いて(19)式を変形した上で平均値の定理を適用すると、以下の通り

実航海の燃料消費量が厳密に定式化される。

$$\begin{aligned} F_{\sigma}^* &= \sum [\gamma_i^* C_{h_i} U_i^3 T_i \{ 1 + \alpha_i^2 \left( \frac{1}{\alpha_i^2} \frac{\Delta T_i^*}{T_i^{\#}} \right. \\ &\quad + \frac{1}{T_i^{\#}} \int_0^{T_i^{\#}} \frac{(m_0 + m_y) \beta r / (\alpha_i U_i) + C_{\delta_i} \delta^2}{C_{h_i}} dt) \\ &\quad + \alpha_i^2 \left[ \frac{(m_0 + m_y) \beta r / (\alpha_i U_i) + C_{\delta_i} \delta^2}{C_{h_i}} \right]_{t=T_i^{\#} + v_i \Delta T_i^*} \\ &\quad \left. \times \frac{1}{T_i^{\#}} \int_0^{T_i^{\#}} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \}] \quad (0 < v_i < 1) \end{aligned} \quad (37)$$

ビューフォート風力階級6（風浪階級5に相当）までの海象下で適切に調整されたオートパイロットによる保針制御が実行されていれば、

$$(\Delta\psi - \beta)^2 \ll 1 \quad \& \quad \beta r \ll 1 \quad \& \quad \delta^2 \ll 1$$

したがって

$$\frac{1}{T_i^{\#}} \int_0^{T_i^{\#}} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \ll 1 \quad \Rightarrow 0(10^{-2})$$

$$\left[ \frac{(m_0 + m_y) \beta r / (\alpha_i U_i) + C_{\delta_i} \delta^2}{C_{h_i}} \right]_{t=T_i^{\#} + v_i \Delta T_i^*} \ll 1 \quad \Rightarrow 0(10^{-2})$$

が成り立ち、(37)式の { } 内第3項は $10^{-4}$ 以下の微小量となって、第1項の「1」に対して無視することができる。その結果、(37)式に航路要素長  $l_i$  を用いた

$$T_i = \frac{l_i}{U_i} \quad (38)$$

の関係を用いると、無次元化された第一評価関数と第二評価関数(26)、(27)式は次式で与えられる。

$$J_{1i} = \int_0^{\infty} \left( \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2\alpha_i^2} + \frac{(m'_0 + m'_y) \beta r' + C_{\delta_i}' \delta^2}{C_{h_i}'} \right) dt' \quad (39)$$

$$J_2 = \sum [\gamma_i^* C_{h_i} U_i^2 (l_i + \alpha_i^2 l J_{1i})] \quad (40)$$

本解法を精密解法と称する。

精密解法を近似解法と比較すると、第一評価関数の被積分関数に対する自然減速係数  $\alpha_i$  の関わり方が異なることに注意を要する。

また、精密解法ではアドミラルティ係数とスリップ比がほぼ一定という近似(23)式を廃棄する。

## 5. 準精密解法

精密解法では、第一評価関数(39)式の被積分関数に速力  $U_i$  に依存する自然減速係数  $\alpha_i$  とアドミラルティ係数  $C_{ad}$  スリップ比  $s_{p_i}$  を含むため、第二評価関数(燃料消費量)最小化の各過程に第一評価関数最小化の計算が含まれて演算量が大幅に増大する。第二評価関数(40)式を変形した

$$J_2 = \Sigma [\gamma_i^* C_{h_i} U_i^2 l_i (1 + \alpha_i^2 \frac{L}{l_i} J_{1i})] \quad (41)$$

において、一般に、航路要素長  $l_i$  が船体長  $L$  より遙かに大きいことを考慮すると、(41)式における  $J_{1i}$  の項の寄与度が小さくなることが予想される。即ち、第一評価関数(39)式の被積分関数に含まれる自然減速係数  $\alpha_i$  を  $1$  とおき、さらに、アドミラルティ係数とスリップ比を一定として取り扱っても十分な精度が確保できることが期待できる。したがって、近似解法の第一評価関数と精密解法の第二評価関数との組み合わせ

$$J_{1i} = \int_0^\infty \left( \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} + \frac{(m'_0 + m'_y)\beta r' + C_{\delta_i'} \delta^2}{C_{h_i'}} \right) dt' \quad (26)$$

$$J_2 = \Sigma [\gamma_i^* C_{h_i} U_i^2 (l_i + \alpha_i^2 L J_{1i})] \quad (40)$$

に基づいて操舵制御と主機出力調整を最適化する問題を準精密解法として、後述の有用性評価に供する。準精密解法では、精密解法と同様に(40)式の船体抵抗係数  $C_{h_i}$  が速力  $U_i$  に依存することに注意を要する。

## 6. 航海最適化

航海の基本操作である操舵制御と主機出力(速力)調整の最適化を行う。

### 6.1 操舵最適化

操縦性能に関係する第一評価関数(26)および(39)

式は、最適制御理論の最適レギュレータ問題として解を得ることができる。

#### 6.1.1 状態方程式

操縦運動の動特性を表す状態方程式は、無次元化された線形1次応答モデルを用いて行列形式で表される。

$$\dot{x}'_m = A'_m x'_m + B'_m u'_m \quad (42)$$

$$x'_m = \begin{pmatrix} \Delta\psi \\ r' \end{pmatrix}$$

$$u'_m = \delta$$

$$A'_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T'} \end{pmatrix}$$

$$B'_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K'}{T'} \end{pmatrix}$$

$K'$  : 旋回力指数、 $T'$  : 針路安定性指数

また、横流れ角  $\beta$  は、線形1次応答モデルと同等の精度で、回答角速度  $r'$  と舵角  $\delta$  の線形結合で近似することができる<sup>6)</sup>。

$$\beta = \alpha'_\beta r' + b'_\beta \delta \quad (43)$$

#### 6.1.2 評価関数

第一評価関数  $J_{1i}$  についても、状態方程式と同様に、以下の通り行列形式で表すことができる。

$$J_{1i} = \int_0^\infty ( {}^t x'_m Q'_{mi} x'_m + 2 {}^t x'_m S'_{mi} u'_m + {}^t u'_m R'_{mi} u'_m ) dt' \quad (44)$$

(44)式において、変数や係数行列の左肩の「 $t$ 」は転置行列を意味する。

#### (1) 近似解法および準精密解法

近似解法および準精密解法では、(43)式を適用することによって第一評価関数(44)式の被積分関数の係数行列が次の通り与えられる。

$$\begin{aligned}
Q'_{mi} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}a'_{\beta} \\ -\frac{1}{2}a'_{\beta} & a'_{\beta} \left\{ \frac{1}{2}a'_{\beta} + \frac{m'_0+m'_y}{c_{hi}'} \right\} \end{pmatrix} \\
S'_{mi} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b'_{\beta} \\ \frac{1}{2}b'_{\beta} \left\{ a'_{\beta} + \frac{m'_0+m'_y}{c_{hi}'} \right\} \end{pmatrix} \\
R'_{mi} &= \frac{1}{2}b'^2_{\beta} + \frac{c_{\delta i}'}{c_{hi}'}
\end{aligned} \quad (45)$$

これらの状態量やパラメータは全て無次元化されていて船速  $U_i$  には依存しない。即ち、第一評価関数値  $J_{1i}$  が全ての航路要素  $\Delta\sigma_i$  に対して一定となり  $i$  には依存しないので、第一評価関数の最適化処理を第二評価関数の最適化から切り離すことができる（評価関数の分解）。

## (2) 精密解法

精密解法では、第一評価関数(44)式の被積分関数の係数行列(45)が次式に置き換わる。

$$\begin{aligned}
Q'_{mi} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha_i} & -\frac{1}{2\alpha_i}a'_{\beta} \\ -\frac{1}{2\alpha_i}a'_{\beta} & a'_{\beta} \left\{ \frac{1}{2\alpha_i}a'_{\beta} + \frac{m'_0+m'_y}{c_{hi}'} \right\} \end{pmatrix} \\
S'_{mi} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\alpha_i}b'_{\beta} \\ \frac{1}{2}b'_{\beta} \left\{ \frac{a'_{\beta}}{\alpha_i} + \frac{m'_0+m'_y}{c_{hi}'} \right\} \end{pmatrix} \\
R'_{mi} &= \frac{1}{2\alpha_i}b'^2_{\beta} + \frac{c_{\delta i}'}{c_{hi}'}
\end{aligned} \quad (46)$$

この場合は、船体抵抗係数  $c_{hi}'$  および舵抵抗係数  $c'_{\delta}$  が自然減速係数  $\alpha_i$  の関数となることに注意を要する。

精密解法では、評価関数値  $J_{1i}$  が係数行列(46)に含まれる自然減速係数  $\alpha_i$  を通して速力  $U_i$  の関数となっているため、第一評価関数の最適化処理を第二評価関数の最適化から切り離すことができず、評価関数の分解は成立しない。

## 6.1.3 最適レギュレータ問題の求解

状態方程式(42)式と評価関数(44)式で表される制御問題の最適解は、最適レギュレータ理論により、以下のフィードバック制御として得られる<sup>7)</sup>。

$$u'_m = -K'_{fi}x'_m \quad (47)$$

$$K'_{fi} = R'_{mi}{}^{-1}({}^tB'_m P'_{mi} + {}^tS'_{mi}) \quad (48)$$

$P'_{mi}$  は以下のリッカチの方程式の解行列である。

$$\begin{aligned}
& (P'_{mi}B'_m + S'_{mi})R'_{mi}{}^{-1}({}^tB'_m P'_{mi} + {}^tS'_{mi}) \\
& + P'_{mi}A'_m + {}^tA'_m P'_{mi} - Q'_{mi} = 0
\end{aligned} \quad (49)$$

一方、有次元のフィードバック係数  $K_{fi}$  は、有次元化行列  $\Lambda_i$  を用いて次式で与えられる。

$$K_{fi} = (k_1 \quad k_2) = K'_{fi}\Lambda_i \quad (50)$$

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{L}{\alpha_i U_i} \end{pmatrix} \quad (51)$$

また、第一評価関数の最適値は、航路要素  $\Delta\sigma_i$  における  $x'_m$  の初期値  $x'_{mi}(0)$  を用いて、

$$J_{1i}^{opt} = {}^t x'_{mi}(0) P'_{mi} x'_{mi}(0) \quad (52)$$

で与えられ、 $x'_{mi}(0)$  は、航路要素  $\Delta\sigma_i$  の始点における変針角  $\Delta\psi_i(0)$  を用いて次式で与えられる。

$$x'_{mi}(0) = \begin{pmatrix} \Delta\psi_i(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

さらに、(42)式に(47)式を代入すると

$$\dot{x}'_m = (A'_m - B'_m K'_{fi})x'_m \quad (54)$$

この最適フィードバック制御系の状態ベクトル  $x'_m$  の挙動は、遷移行列  $e^{A'_{fi}t'}$  を用いて次式で与えられる。

$$x'_{mi}(t') = e^{A_{fi}t'} x'_{mi}(0) \quad (55)$$

$e^{A_{fi}t'}$  : 遷移行列

$$A_{fi}' = A' - B'K_{fi}' \quad (56)$$

## 6.2 主機出力（船速）最適化

一般に、商船の運航においては、荷主との契約等に基づき目的地への到着日時が指定され、定時性確保のために航海時間の遵守が求められる。したがって、 $T_v$  を拘束される総航海時間とすると

$$\sum \frac{l_i}{\alpha_i U_i} = T_v \quad (57)$$

主機出力（速力）最適化は、(57)式の拘束条件の下で第二評価関数を最小化する問題として扱うことができる。即ち、

$$\hat{J}_2 = J_2 + \lambda \left( \sum \frac{l_i}{\alpha_i U_i} - T_v \right) \quad (58)$$

で生成される関数に、ラグランジュの未定係数法を適用することによって解を得ることができる。前述の各解法に対して

$$\frac{\partial \hat{J}_2}{\partial U_i} = 0 \quad (i = 1 \cdots n) \quad (59)$$

$$\frac{\partial \hat{J}_2}{\partial \lambda} = 0 \quad (59)'$$

を適用し整理すると、前述のそれぞれの解法に対して以下の  $U_i$  に関する  $n$  通りの方程式が得られる。但し、 $X_U$  は変数  $X$  の  $U$  による偏微分を表す。

$$X_U \equiv \frac{\partial X}{\partial U}$$

### (1) 近似解法

$$\begin{aligned} & \{C_{hi}[\alpha_i^2 (\gamma_{U_i}^* U_i + 2\gamma_i^*) l_i \\ & + \alpha_i^3 \{\gamma_{U_i}^* \alpha_i U_i + 2\gamma_i^* (1 - \Delta U_{U_i})\} L J_{1i}^{opt}\}] U_i^3 \\ & - (1 - \Delta U_{U_i}) l_i \lambda = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

### (2) 精密解法

$$\begin{aligned} & \{C_{hi}[\alpha_i^2 (\gamma_{U_i}^* U_i + 2\gamma_i^*) l_i \\ & + \alpha_i^3 \{\gamma_{U_i}^* \alpha_i U_i + 2\gamma_i^* (1 - \Delta U_{U_i})\} L J_{1i}^{opt} \\ & + \gamma_i^* \alpha_i^4 U_i L J_{1U_i}^{opt}] \\ & + C_{hU_i} \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (l_i + \alpha_i^2 L J_{1i}^{opt})\} U_i^3 \\ & - (1 - \Delta U_{U_i}) l_i \lambda = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

### (3) 準精密解法

$$\begin{aligned} & \{C_{hi}[\alpha_i^2 (\gamma_{U_i}^* U_i + 2\gamma_i^*) l_i \\ & + \alpha_i^3 \{\gamma_{U_i}^* \alpha_i U_i + 2\gamma_i^* (1 - \Delta U_{U_i})\} L J_{1i}^{opt}] \\ & + C_{hU_i} \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (l_i + \alpha_i^2 L J_{1i}^{opt})\} U_i^3 \\ & - (1 - \Delta U_{U_i}) l_i \lambda = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

それぞれの解法において、最適速力  $U_i^{opt}$  は(60)～(62)式の何れかと(57)式からなる  $(n+1)$  元連立方程式（決定方程式）の解として得られる。その結果、第二評価関数（燃料消費量）の最適値は、最適速力  $U_i^{opt}$  と第一評価関数の最適値  $J_{1i}^{opt}$  を用いて次式で与えられる。

$$J_2^{opt} = \sum [\gamma_i^* C_{hi} U_i^{opt^2} (l_i + \alpha_i^2 L J_{1i}^{opt})] \quad (63)$$

また、航路要素  $\Delta \sigma_i$  における最適な主機馬力  $B_{hp}^{opt}{}_i$  は、(38)式の関係を用いることにより、次式で与えられる。

$$B_{hp_i}^{opt} = \frac{1}{\eta_t \eta_p} C_{hi} U_i^{opt^3} \left( 1 + \frac{\alpha_i^2 L}{l_i} J_{1i}^{opt} \right) \quad (64)$$

尚、摩擦抵抗係数  $C_h$  の速力  $U$  による微係数  $C_{hU}$  の基礎となる関係式は、7.1.5 節の(1)に示す。また、(61)式における第一評価関数最適値  $J_{1i}^{opt}$  の速力  $U$  による偏微分値  $J_{1U}^{opt}$  はリッカチの方程式(49)を基礎に求めることが可能で、その求解法を付章1に示す。

## 6.3 最適化の解法

第一評価関数および第二評価関数に基づく航海最適化の解は数値計算によって求められるが、以下の3通りの繰返しによる収束計算を伴う。



(1) 第一評価関数

リッカチの方程式(48)の解行列  $P'_{mi}$  の求解

(2) 第二評価関数

- ① 後述 (7.1.5 節) のシェーンヘルの式による摩擦抵抗係数  $C_f$  の求解
- ② 速力  $U_i$  の決定方程式 (60) ~ (62) と (57) 式からなる  $(n+1)$  元連立方程式の求解

尚、シミュレーションの計算は倍精度浮動小数点で行い、収束判定条件は共通に相対誤差  $10^{-8}$  とした。

推進運動方程式から主機出力最適化に至る流れを、馬力の視点から模式的に表した図を Fig. 4 に示す。

Table 1 コンテナ船主要目

要素	アイテム	記号	単位	値
船体	船長	L	m	175.00
	船幅	B	m	25.40
	吃水	d	m	8.500
	排水容積	$\nabla$	m <sup>3</sup>	21,222
	ブロック係数	C <sub>b</sub>	-	0.559
舵	舵面積	A <sub>R</sub>	m <sup>2</sup>	33.0376
	舵高	H <sub>R</sub>	m	7.7583
	アスペクト比	$\lambda$	-	1.8219
プロペラ	直径	D	m	6.533
	ピッチ	p		1.009
	ブレード数			5

### 7. 航海最適化の数値シミュレーション

前述の3通りの解法の特徴を把握するために、数値シミュレーションを実施した。

#### 7.1 シミュレーション条件

##### 7.1.1 供試船

供試船としては、造船研究協会108部会の一軸コンテナ船を採用した。代表的な主要目を Table 1 に示す<sup>8)</sup>。尚、付加質量は元良チャート<sup>9)</sup>から読み取った。

##### 7.1.2 航路および航路要素

航路として、房総沖からサンフランシスコ沖に至

る北太平洋上の大圏航路を設定した。さらに、経度  $10^\circ$  毎の変針点で分割して航路要素とした。

##### 7.1.3 波浪条件

波浪条件は、ビューフォート風力階級6以下の条件の下、それぞれの航路要素に

有義波高 : 1 ~ 5 m

相対波向 :  $-180^\circ \sim 180^\circ$

の範囲で均等に割り振った。

尚、波浪予報データは、例えば財気象業務支援センターより、約55km四方の分解能で11日先まで地球規模で定期的に配信を受けることができる。

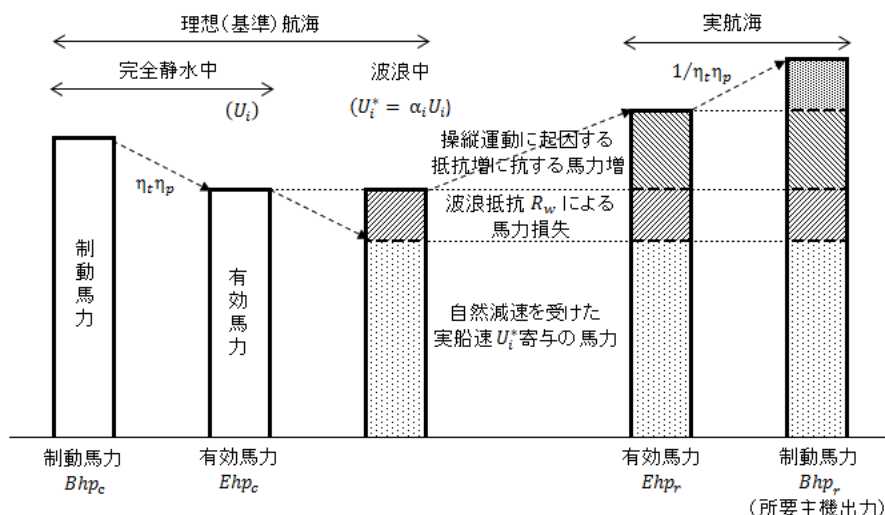


Fig.4 エネルギー解析処理フロー

供試航路と波浪条件を Table 2 に示す。

7.1.4 主機出力および推進系

通常の航海を想定して、シーマージン0.85前後を維持し、主機出力の限界 (MCR) 内で航海可能な航海時間を設定した。また、推進系の効率

伝達効率 : 0.97

推進効率 : 0.72

とした<sup>10)</sup>。

7.1.5 特性データ

(1) 推進性能

摩擦抵抗係数  $C_f'$  は、シェーンヘル<sup>11)</sup>による相当平板の摩擦抵抗係数  $C_f$  とオルゼンの式<sup>5)</sup>による浸水表面積  $S$  を用いて計算した。

$$C_f' = \frac{S}{\nabla_a^{2/3}} C_f \quad (65)$$

$$\frac{0.558}{\sqrt{C_f}} = \ln(R_n C_f) \quad (66)$$

$$R_n = \frac{UL}{\nu} \quad : \quad \text{レイノルズ数} \quad (67)$$

$\nu$  : 海水密度

$$S = Lpp \cdot B(1.22 \frac{d}{B} + 0.46)(C_b + 0.765) \quad (68)$$

また、形状影響係数  $\kappa$  の計算には、住吉の推定式<sup>12)</sup>を用いた。

$$\kappa = 0.0905 + 15.1 \frac{C_b}{(L/B)^2 \sqrt{B/d}} \quad (69)$$

一方、造波抵抗係数  $C_w$  は、埜<sup>13)</sup>の示す事例から主要目 (L/B、d/B、 $C_b$ ) が近い船を選んで残余抵抗係数をスケール変換し、形状影響を差し引いて求めた。

以上の結果、アドミラルティ係数  $C_{ad}$  は、次式で与えられる。

$$C_{ad} = \frac{1}{\frac{2}{3}(C_w + (1 + \kappa)C_f')} \quad (70)$$

さらに、伴流係数はハーバルドのチャート<sup>5)</sup>から読み取った。

(2) 操縦性指数

旋回力指数と針路安定性指数は、広田<sup>14)</sup>の示す事例から主要目 (L/B、d/B、 $C_b$ ) が近い船を選び、スケール変換して用いた。但し、供試船が北太平洋就航のコンテナ船であることを考慮して、フルード数を0.3 (シーマージン0.85の速力で約24.2ノット) とした。

(3) 自然減速係数

自然減速係数は、同等のサイズのコンテナ船に対して与えられた萩原<sup>15)</sup>の近似式とパラメータを用いた。

$$\Delta U = m(P)f(h)g(\chi) \quad (71)$$

$$m(P) = a_m P + b_m = \frac{a_m}{\eta_r \eta_p} C_h U^3 + b_m$$

$$f(h) = a_f \{1 - \exp(-b_f h^{c_f})\}$$

$$g(\chi) = 1 - a_g \{1 - \exp(-b_g \chi^{c_g})\}$$

$P$  : 主機出力

$h$  : 有義波高

$\chi$  : 相対波向

したがって、自然減速量  $\Delta U$  の速力  $U$  による偏微分は、次式で与えられる。

Table 2 航海条件

航路要素	変針角 (deg)	航程 (ml)	有義波高 (m)	相対波向 (deg)
房総沖	0	568.017552	1	150
1	6.390538	500.110264	4	-45
2	6.876728	452.016349	2	-170
3	7.19336	421.037027	1	80
4	7.374641	405.179264	3	30
5	7.442368	403.253289	4	120
6	7.404634	415.107188	5	160
7	7.256931	441.649677	4	-135
8	6.981531	484.694383	2	-90
9	1.967065	447.019336	3	60
S.F 沖				
計		4538.08433		





Table 5 ケーススタディ条件 (波浪)

波浪ID	有義波高(m)				相対波向(°)	
	①	②	③	④	Ⓐ	Ⓑ
房総沖	1	3	1	1	150	-65
1	4	2	3	3	-45	100
2	2	4	2	3	-170	-25
3	1	5	1	2	80	-135
4	3	4	3	1	30	175
5	4	3	5	5	120	-95
6	5	1	4	4	160	-55
7	4	2	3	3	-135	10
8	2	4	2	4	-90	55
9	3	1	3	2	60	-155
S.F.沖						

ミュレーション結果の比較・検証を行った。

Table 5 にケーススタディに供した波浪条件を示す。因みに、7.3 節のシミュレーション結果に対応する波浪条件は、Table 5 の①とⒶの組み合わせである。

一方、Table 6 の(a)に、ケース(a)に対して、精密解法の燃料消費量、主機出力一定の場合と精密解法の燃料消費量の差 (=削減効果) および精密解法と近似解法の燃料消費量の比率を、(b)に、ケース(b)に対する上記の燃料消費量と削減効果および比率を示す。さらに、Table 7 には、(a)、(b)両ケースにおける精密解法と準精密解法の燃料消費量の僅差の度合いを、有効数字の一致する桁数で示す。

Table 7 精密解法と準精密解法の一致度

(a) 波浪依存性

評価指標	一致桁数(精密&準精密)	
	Ⓐ	Ⓑ
波浪条件		
①	8	8
②	8	8
③	9	9
④	9	9

(b) 主機出力依存性

波浪条件 : ①&Ⓐ		一致桁数(精密&準精密)
航海時間(hr)	190 [85]	8
[主機出力]	200 [75]	8
(%付近)	225 [50]	9

ケーススタディの結果、全てのケースで

- (1) 燃料消費量削減効果は、精密解法、準精密解法、近似解法の順に大きい。
- (2) Table 6 において、主機出力一定に対する精密解法の燃料消費量削減効果には波浪や主機出力に起因するバラツキがあるが、精密解法と近似解法の削減量の比率は全てのケースで有効数字6または7桁まで一致している。

Table 6 燃料消費削減量

(a) 波浪依存性

【190hr】 波浪条件	燃料消費量(精密:ト)		削減効果(一定-精密:ト)		改善効果(精密/近似)	
	Ⓐ	Ⓑ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓐ	Ⓑ
①	382.353	385.623	0.241	0.656	0.99999985	0.99999958
②	382.578	384.655	0.350	0.372	0.99999978	0.99999977
③	379.732	381.263	0.107	0.200	0.99999993	0.99999988
④	379.025	384.899	0.080	0.292	0.99999995	0.99999982

(b) 主機出力依存性

波浪条件 : ①&Ⓐ		燃料消費量(精密:ト)	削減効果(一定-精密:ト)	改善効果(精密/近似)
航海時間(hr)	190 [85]	382.353	0.241	0.99999985
[主機出力]	200 [75]	349.071	0.233	0.99999985
(%付近)	225 [50]	289.064	0.226	0.99999986

- (3) Table 7において、精密解法と準精密解法の燃料消費量についても、有効数字8または9桁まで一致している。

以上の結果が全てのケースで成立しており、さらに

- (4) シミュレーション計算を倍精度浮動小数点で行っている  
(5) 上記のケーススタディのうち数ケースで収束計算の収束判定条件を $10^{-12}$ としても、Table 6 および Table 7 の傾向は変わらなかった

ことを考慮すると、各解法の普遍性と削減効果の差の有意性が保たれていると考えられる。

特に、波浪や航海時間の条件に応じて、精密解法の燃料消費量や削減効果にバラツキがある (Table 6) にも拘わらず、全てのケースで、精密解法と近似解法の改善効果の比率が小数6または7位まで「9」が並んで一致している (Table 6) ことや精密解法と準精密解法の燃料消費量の一致度が有効数字で8または9桁 (Table 7) という結果は、近似解法や準精密解法の近似度の高さを示していると考えられる。但し、この近似度の高さの程度は、準精密解法導入の根拠とした(41)式から、変針点の数(航路要素長)などの航路の引き方や就航海域等にも依存すると思われる。

因みに、Table 6 には、波浪条件によっては、精密解法の主機出力一定に対する燃料消費量削減効果が約0.66トンというケースがあり、就航条件によってはさらに大きな効果が期待できる。また、船舶の主要な燃料として使用されるC重油の硫黄含有率が平均2.3WT%であることを考慮すると、このケースでは、本船が北太平洋航路を年間10往復するとして、およそ0.3トン/年の硫黄分に対応する排ガスを削減することができると推算される。

## 8. まとめ

地球環境汚染問題が注目される中、船舶の運航においても、排ガスによる大気汚染が問題視されるようになって久しい。この動きに呼応して、国際海事機関 (IMO) が船舶の排ガスに含まれる窒素酸化物や硫黄酸化物に規制を設け、その規制値は段階的に厳しくなってきた<sup>2)</sup>。

産業界でも、船型改善による推進抵抗の低減や主機の性能向上、燃料の改質、排ガス中の酸化物除去装置の開発等、多面的に環境保護への取り組みが行われている<sup>2)</sup>が、本稿では、CO<sub>2</sub>排出量の削減も視野に、船舶の運航技術の最適化 (海象に適応した操舵制御と主機出力調整) によって航海中の燃料消費量を削減するという視点から、この問題へのアプローチを試みた。

特に、先行研究<sup>1)</sup>では、「理想航海」と「実航海」という2通りの概念を定義し、近似的に船舶運航における燃料消費量の定式化と解析を試みたが、本稿では、両概念の間に「基準航海」という新しい概念を導入して燃料消費量の解析を精密化し、近似解法と精密解法の特徴を評価すると共に、両解法の長所を兼ね備えた準精密解法を新たに提案した。また、それぞれの解法に対して最適制御理論を応用して最適操舵の解を求め、その最適値を用いて主機出力調整の最適解を与える ( $n+1$ ) 元連立の決定方程式を導いた。

さらに、一軸コンテナ船と北太平洋の大圏航路による数値シミュレーションによって、燃料消費量低減効果 (即ち、排ガス低減効果) を確認すると共に、最適解を求める処理の効率性の視点に立って各々の解法の特徴を比較し、以下の知見を得た。

- (1) 高精度の航海最適化を求める場合には、精密解法および準精密解法の適用が望ましいが、近似解法でも十分な実用性を有している。一方、処理の実時間性が重要視される組み込み型のリアルタイムシステムに適用する場合は、処理時間で効率的な近似解法あるいは準精密解法の方が適している。
- (2) 以上の結果、精度重視で処理時間の制約が小さい場合は精密解法を適用し、処理効率が重視される場合は準精密解法または近似解法を適用する等、これらの解法はその目的に応じて使い分けられるのが望ましい。特に、船舶の運転を実時間で制御するオンボードリアルタイム航海支援装置に本技術を組み込む場合は、精度と処理効率の両方を兼ね備えた準精密解法が実用性に優れている。

船舶の運航においては、気象海象予報等の不確定要素のため、必ずしも計画通りの航海ができるとは限らない。変化する就航条件に適応して本船の判断で臨機応変に計画を見直ししながら船を進める必要があるため、

本稿で考察した技術が航海支援装置<sup>17),18)</sup>に組み込まれて本船に搭載されることが望ましい。その場合に、燃料消費量の低減効果と共に処理のリアルタイム性が重要な要素となることを考慮すると、本稿で考察した3通りの解法の中で準精密解法が最も実用性に優れていると考えられる。

本稿では、SR108コンテナ船を供試船として北太平洋航路で往航の数値シミュレーションを行ったが、燃料消費量低減の効果は、船種やサイズ、航路によって異なることは自明である。また、本技術は、船の新造や主機の換装等を必要とせず、全ての就航船に適用することができる。数値シミュレーションは、房総沖からサンフランシスコ沖に至る往航に対して実施したが、往航には必ず復航を伴うこと、コンテナ船に限定しても、最近の船は排水容積にして供試船の3~5倍に大型化している<sup>19)</sup>こと、さらに、世界で就航している輸送船の隻数<sup>20)</sup>や1隻の船の年間の就航回数等を考慮すると、航海最適化技術の適用によって燃料消費や排ガスが大幅に削減されることが期待される。

尚、本稿では、解析の複雑化を避けるために、船舶の対地運動や主機出力の上限に対する処置を割愛した。対地運動に対しては海流や潮流による設定針路と対水船速の補正を考慮した上で、また、主機出力の上限に対しては第二評価関数にペナルティ関数を付加した上で、本稿と同様の手順を踏んで $(n+1)$ 元連立の決定方程式を導くことにより対処可能である。

本稿で取り上げた課題は地球環境問題に止まらず、枯渇が懸念される資源問題にも関わっており、今後、さらに研究を深化させたい。

## 参考文献

- 1) 金丸：船舶の一航海省燃費評価基準とその階層構造、日本造船学会論文集、第168号（1990）p. 597-603、
- 2) 技術トピックス、日本海事協会
- 3) 野本、元山：船首揺れにもとづく推進馬力の損失について、造船協会論文集、第120号（1966）p. 71-80
- 4) 航海便覧（三訂版）、海文堂出版株式会社（1991）p. 439、1991
- 5) 日本財団図書館（電子図書館）、海洋工学&船舶工学
- 6) Kanamaru H. and Sato T. : “Adaptive autopilot system with minimum propulsive Energy consumption”, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Symposium of Ship Operation Automation (1979) pp.124-133
- 7) 坂和：最適システム制御論、コロナ社(1972) p. 14-30
- 8) 孫、野本：高速コンテナ船の操縦運動と横揺れの連成挙動について、日本造船学会論文集、第150号（1981）p. 232-244
- 9) 元良：船体運動に対する附加質量および附加慣性モーメントについて（その3）、造船協会論文集、第106号(1959) p. 63-68
- 10) 大内：二軸大直径低回転プロペラ、’07「超省エネ船シンポジウム」（2007）
- 11) 上田：滑面平板の乱流摩擦抵抗式について、日本造船学会誌、第484号（1969）p. 451-462
- 12) 住吉：水槽試験結果の統計解析による1軸船の満載状態における形状影響係数の推定、日本造船技術センター技報、第2号（1974）p. 7-12
- 13) 埴；随想・造波抵抗論議あれこれ
- 14) 広田：船舶制御システム工学<増補版>、成山堂書店（1984）p. 99
- 15) 萩原、巻島：最適航路に関する考察、日本航海学会論文集（1980）62号 p. 77-88
- 16) 金丸：空間補正機能を付与した線形最小二乗法による非線形カーブフィッティング、長崎総合科学大学紀要（2016）第56号、第1号 p. 22-35
- 17) Kanamaru H. and Matsuda K. : “Super Integrated Ship Operation Control”, Proceedings of Maritime Communications and Control, Institute of Maritime Engineers (1988) pp.119-129
- 18) 金丸 他：三菱高度運航支援システム、三菱重工技報（1994）第31巻3号 p. 164-167
- 19) 上田、大竹、坂本、西村、森：最近の大型コンテナ船の技術動向、三菱重工技報（2004）第41巻6号 p. 326-329

20) SHIPPING NOW 2016-2017/データ編、日本海事広報協会 p.20-21

### 付章 1. 第一評価関数の偏微分

精密解法では、第一評価関数の最適値(52)式において、リッカチの方程式の解行列  $P'_m$  が自然減速係数  $\alpha$  と船体抵抗係数  $C_h'$  および舵抵抗係数  $C_\delta'$  を介して速力  $U$  の関数となる。したがって  $U$  による第二評価関数最適値の偏微分をとると、(52)式より

$$\begin{aligned} J_{1U} &= J_{1\alpha} \cdot \alpha_U + J_{1C_h'} \cdot C_h'{}_U + J_{1C_\delta'} \cdot C_\delta'{}_U \\ &= \alpha_U {}^t x'_m(0) P'_{m\alpha} x'_m(0) \\ &\quad + C_h'{}_U {}^t x'_m(0) P'_{mC_h'} x'_m(0) \\ &\quad + C_\delta'{}_U {}^t x'_m(0) P'_{mC_\delta'} x'_m(0) \end{aligned} \quad (77)$$

$$\alpha_U = \frac{\Delta U}{U^2} - \frac{\Delta U_U}{U} = \frac{1-\alpha-\Delta U_U}{U} \quad (74)$$

(77)式の右辺第1項の  $P'_{m\alpha}$  については、リッカチの方程式(49)を自然減速係数  $\alpha$  で偏微分して整理することにより、 $P'_{m\alpha}$  を変数とするリアプノフの方程式が得られる。但し、 $Q'_{m\alpha}$ 、 $S'_{m\alpha}$ 、 $R'_{m\alpha}$  は(46)式の  $\alpha$  による偏微分である。

$$P'_{m\alpha} A'_f + {}^t A'_f P'_{m\alpha} + Q'_f = 0 \quad (78)$$

$$A'_f = A'_m - B'_m K'_f \quad (79)$$

$$K'_f = R'_m{}^{-1} ({}^t B'_m P'_m + {}^t S'_m) \quad (48)$$

$$Q'_f = Q'_{m\alpha} - {}^t K'_f {}^t S'_{m\alpha} - S'_{m\alpha} K'_f + {}^t K'_f R'_{m\alpha} K'_f \quad (80)$$

(80)式の右辺第4項の計算には以下の関係式が適用されている。

$$R'_{m\alpha}{}^{-1} = -R'_m{}^{-1} R'_{m\alpha} R'_m{}^{-1} \quad (81)$$

リアプノフの方程式(78)はテンソル積を用いて解くことができ、(77)式にその解行列  $P'_{m\alpha}$  と(74)式を代入することによって、 $J_{1\alpha}$  を得ることができる。

(77)式の右辺第2項と第3項についても(78)~(81)式の  $\alpha$  を  $C_h'$  と  $C_\delta'$  に置き換えることによって、 $P'_{mC_h'}$  と  $P'_{mC_\delta'}$  したがって  $J_{1C_h'}$  および  $J_{1C_\delta'}$  が得られる。

### 付章 2. 自然減速量と船体抵抗係数の偏微分

(4)、(70)式より、

$$C_h = \frac{\rho}{2} \{ C_w + (1 + \kappa) C_f \} \nabla_a^{2/3} \quad (82)$$

したがって、(65)式を考慮すると

$$\begin{aligned} C_{hU} &= \frac{\rho}{2} \{ C_{wU} + (1 + \kappa) C_{fU} \} \nabla_a^{2/3} \\ &= \frac{\rho}{2} \{ C_{wU} \nabla_a^{2/3} + (1 + \kappa) C_{fU} S \} \end{aligned} \quad (83)$$

また、(66)式の両辺を  $U$  で偏微分して整理すると

$$C_{fU} = -\frac{1}{U} \frac{C_f}{1 + \frac{0.558}{2} \frac{1}{\sqrt{C_f}}} \quad (84)$$

(84)式を(83)式に代入すると次式を得る。

$$C_{hU} = \frac{\rho}{2} \left\{ C_{wU} \nabla_a^{2/3} - (1 + \kappa) \frac{1}{U} \frac{C_f}{1 + \frac{0.558}{2} \frac{1}{\sqrt{C_f}}} S \right\} \quad (85)$$

(85)式を用いることによって、馬力  $P_U$  と自然減速量  $\Delta U$  の偏微分値が得られる。

$$P_U = \frac{1}{\eta \eta_p} U^2 (C_{hU} U + 3C_h) \quad (86)$$

$$\Delta U_U = a_m \cdot P_U f(h) g(\chi) \quad (87)$$

尚、本稿では埴<sup>13)</sup>の示す事例から類推した剰余抵抗係数(一定値)を用いているため、(85)式は次式となる。

$$C_{hU} = -\frac{\rho}{2} \frac{1}{U} \frac{C_f}{1 + \frac{0.558}{2} \frac{1}{\sqrt{C_f}}} S \quad (85)'$$