一般境界入出力システムの数学モデルに関する一考察*

日當明男†

A Note on a Mathematical Model for General Boundary Input/Output Systems

Haruo HINATA

The present author has been discussed about mathematical models for general boundary input systems in [10, 15, 17–23] and about outputs from general boundary input systems in [9, 13, 14]. In this report, we will study three points. The first study point is to reconstruct the previous theory for general boundary input systems, in order to admit input operators for the systems. The Second study point is to unify the above two discussions and to introduce a mathematical model for general boundary input/output systems. The third study point is to investigate distributed input/output systems equivalent to general boundary input/output systems.

1 はじめに

境界からの入力を持つ境界入力システムを無限次元システムとして捉え，関数解析的手法を用いて研究したのは1968年のFattorini[5]が最初であり，これまでにも多くの研究がなされてきた．その中でもSalamon[28]は，境界入力システムを特殊な分布入力システムとして捉えた．このような捉え方は，Weiss[29–32]に受け継がれて整備され，Curtain[2]が境界入力システム研究の枠組みとして整理した．Curtainが整理した枠組みでは，境界入力は空間的に非連続な入力フィルター(入力作用素)を介してシステムの状態に影響を及ぼすと考え，システムを記述する微分方程式(発展方程式)の非斉次項に非連続入力作用素とともに境界入力を表現する．そのような入力作用素を許容するために，システムの記述方程式の解釈を(超関数の領域にまで)拡大する必要があった．そのように拡大解釈したシステムをWeiss[31]は，レギュラーシステム(regular system)と呼んでいる．しかし，このシステム解釈はどの程度拡大しなければならないのか，非連続入力作用素をどのように記述するかについては，明確に応えていないように思う．実際，Curtain[2]においては，すべての境界入力システムを包括的に扱うことができるように，システム解釈を最大限に拡大している．

一方，Fattorini[5]に始まり，Balakrishnan[1]やLasiecka[24]およびLasiecka&Triggiani[25]を経て，Hinata&Inaba[16, 19]，Inaba&Hinata[20, 21]，Hinata[8–10]，日當[12–15, 22, 23]，日當&稲葉[17, 18]によって進展した考え方は，偏微分方程式の境界値問題を参考にしたものである．すなわち，境界値問題におけるグリーン関数に相当するグリーン作用素を介して境界入力がシステムの状態に影響を及ぼすという考え方である．境界値問題のグリーン関数同様，グリーン作用素とその滑らかさ(連続性の度合い)には与えられる境界条件(入力パターン)の違いが反映している．このようなグリーン作用素を用いると，境界入力システムの特性の違いを議論することが可能となり，Curtain[2]等の枠組みにおける問題(システム解釈の拡大度合いと非連続入力作用素の記述)に対して応えることもできる．実際，[10, 15, 17–23]では，グリーン作用

*2007年3月30日受付
†情報学部経営情報学科助教授

素の存在を前提とした一般境界入力システムを定義し，一般境界入力システムの数学モデルとして状態空間を拡大した分布入力システムを構築して，そのシステムの特徴を調べ，一般境界入力システムが出力を省いたレギュラーシステム (Weiss[31]) に相当し，レギュラーシステムにおける状態空間の拡大度合いをグリーン作用素の滑らかさで記述し，非連続入力作用素 (拡大された状態空間では連続になる) とグリーン作用素との関係も明らかにした [10]．また，Hinata[8–10, 12] においては，一般境界入力システムにおけるフィードバック問題が議論され，有界な状態フィードバックの下では一般境界入力システムの特性が保たれることが示された [8]．さらに，日當&稲葉 [17] においては，一般境界入力システムに対する可制御性が議論され，Hinata[9, 13, 14] においては，一般境界入力システムに許容される出力作用素についても議論された．しかし，一般境界入力システムの入力作用素の自由度や出力を付加した一般境界入出力システムの数学モデルなど，議論が尽くされたとは言い難い問題も残っている．

本論文ではこれらの問題に応えるために，入力作用素に自由度を設けた一般境界入力システムを議論し，さらに出力も付加した一般境界入出力システムの数学モデルを構築する．また，この数学モデルとは別に，一般境界入出力システムと同じ状態空間を持つ同値な分布入力システムも導入する．この同値なシステムは [9] においては，数学モデルとともに一般境界入力システムに等価なシステムと呼ばれていたものに相当する．しかし，本論文では，同じ初期値と入力に対して，まったく同じ状態や出力を持つ数学モデルと，出力が同じでも状態が位相同型変換 (同値変換) された同値システムとは区別して扱うことにする．

第 2 節では，以降の議論のための数学的な準備を行う．第 3 節では，入力作用素を含めた一般境界入力システムの定義とその特性を整理する．さらに，システムに許容される出力作用素について考察し，一般境界入出力システムの定義とその特徴を明らかにする．第 4 節では，一般境界入出力システムの数学モデルを構築する．この数学モデルは元の一般境界入出力システムの状態空間を拡大して構築することになる．第 5 節では，与えられた分布入出力システムが一般境界入出力システムの数学モデルとなるための必要十分条件を明らかにする．第 6 節では，一般境界入出力システムに同値な分布入出力システムを導入する．この同値なシステムは元の一般境界入出力システムと同じ状態空間を持つ．最後に，第 7 節において本論文での議論と結果をまとめ，今後に残された課題や問題点を整理する．

2　準備

この節では，本論文での議論の準備として，Hilbert 空間と作用素およびその分数べきとその拡張について整理し，さらに半群とその生成作用素に対する分数べきの定義域を用いた Hilbert 空間の系列化やベクトル値関数に対するラプラス変換について整理する．

$\mathcal{X}$ を Hilbert 空間とする．その内積を $<\cdot,\cdot>_{\mathcal{X}}$ と表わし，この内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ と表わす．すなわち，

$$\| x \|_{\mathcal{X}} = \sqrt{< x, x >_{\mathcal{X}}}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

また，部分集合 $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ が稠密であるとき，すなわち，$\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{X}$ を満たすとき，稠密性を明示するために以下のように表現することもある．

$$\mathcal{S} \overset{d}{\subset} \mathcal{X} \quad \text{または，} \quad \mathcal{X} \overset{d}{\supset} \mathcal{S}$$

ここで，包含記号内の d は “dense” (稠密) を意味する．また，$\overline{\mathcal{S}}$ は $\mathcal{S}$ を含む最小の閉集合を意味する．

2 つの線形空間 $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ に対して，

$$\mathcal{U} := \{(s,t);\ s \in \mathcal{S},\ t \in \mathcal{T}\}$$

は $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ の**直積空間**と呼ばれる線形空間となり，$\mathcal{U} = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ と表わされる．このとき，$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ がとも

に Hilbert 空間ならば，$\mathcal{U}$ もまた Hilbert 空間になる．また，Hilbert 空間 $\mathcal{X}$ 内の 2 つの線形部分空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ に対して，次のように $\mathcal{P}$ を定義すると，

$$\mathcal{P} := \{p \in \mathcal{X};\ p = k + m, \quad k \in \mathcal{K},\ m \in \mathcal{M}\}$$

$\mathcal{P}$ もまた $\mathcal{X}$ の線形部分空間となり，$\mathcal{P}$ は $\mathcal{K}$ と $\mathcal{M}$ の**和空間**と呼ばれ，$\mathcal{P} = \mathcal{K} + \mathcal{M}$ と表わされる．もし，$\mathcal{K} \cap \mathcal{M} = \{0\}$ ならば，任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して，$p = k + m$ となる唯一組の $(k, m) \in \mathcal{K} \times \mathcal{M}$ が存在する．このとき，$\mathcal{K} + \mathcal{M}$ は $\mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ と表現されて，$\mathcal{P}$ の**直和分解**と呼ばれ，$\mathcal{P}$ は $\mathcal{K}$ と $\mathcal{M}$ の**直和空間**と呼ばれる．

x, $y \in \mathcal{X}$ が $< x, y >_{\mathcal{X}} = 0$ を満たすとき，x と y は**直交**するといい，$x \perp y$ と表わす．また，線形部分空間 $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ に対して，

$$\{x \in \mathcal{X};\ < k, x >_{\mathcal{X}} = 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}\}$$

は $\mathcal{K}$ の**直交補空間**と呼ばれる閉線形部分空間となり，$\mathcal{K}^{\perp}$ と表わされる．このとき，$\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^{\perp} = \{0\}$ となり，$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{K}} \oplus \mathcal{K}^{\perp}$ が成り立つ．

2 つの Hilbert 空間 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ が $\mathcal{S} \Subset \mathcal{T}$，すなわち，$\mathcal{T}$ の部分空間 $\mathcal{S}$ が $\mathcal{T}$ の位相で稠密であり，さらに Hilbert 空間として $\mathcal{S}$ のほうが $\mathcal{T}$ よりも位相 (誘導ノルム) 的に強い，すなわち，次を満たす $k > 0$ が存在するとき，

$$\| s \|_{\mathcal{T}} \leqq k \| s \|_{\mathcal{S}}, \quad s \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$$

$\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}$ に**稠密で連続的に埋め込まれる**といい．次のように表現する．

$$\mathcal{S} \xhookrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{T} \quad \text{または，} \quad \mathcal{T} \xhookleftarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}$$

Hilbert 空間 $\mathcal{X}$ 内で定義され Hilbert 空間 $\mathcal{Y}$ に値をとる線形作用素 A は，$A : (\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$ のように表現される．ここで，$\mathcal{D}(A)$ は線形作用素 A の定義域を意味する．また，線形作用素 A の値域 $\{y \in \mathcal{Y};\ y = Ax,\ x \in \mathcal{D}(A)\}$ と零空間 $\{x \in \mathcal{D}(A);\ Ax = 0\}$ は，それぞれ $\mathcal{R}(A)$ と $\mathcal{N}(A)$ のように表わす．$\mathcal{X}$ 全体で定義され $\mathcal{Y}$ に値を持つ有界線形作用素全体は Banach 空間となり，$\mathcal{B}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ と表わされる．$\mathcal{B}(\mathcal{X}; \mathcal{X})$ は簡単に $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ と表わす．

線形作用素 $A : (\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ において，A のレゾルベント集合を $\rho(A)$ と表わし，$\lambda \in \rho(A)$ における A のレゾルベント $(\lambda I - A)^{-1}$ を $R(\lambda; A)$ とも表わす．ここで，I は恒等作用素を意味する．また，線形作用素 A のグラフ $\{(x, Ax) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X};\ x \in \mathcal{D}(A)\}$ がノルム

$$\| x \|_{\mathcal{X}} + \| Ax \|_{\mathcal{X}}, \quad x \in \mathcal{D}(A)$$

に対して完備なとき，A は閉作用素と呼ばれる．

Hilbert 空間 $\mathcal{X}$ から実数空間 $\mathbb{R}$ への有界線形作用素 (有界線形汎関数と呼ばれる) 全体が作る空間 $\mathcal{B}(\mathcal{X}; \mathbb{R})$ は $\mathcal{X}$ の双対空間と呼ばれ，$\mathcal{X}'$ と表わされる．このとき，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}'$ の間には 1 対 1 対応が存在する (Riesz の定理)．この 1 対 1 対応によって $\mathcal{X}$ とその双対空間 $\mathcal{X}'$ を同一視するとき，$\mathcal{X}$ は**ピボット空間**と呼ばれる．本論文では，特定の Hilbert 空間以外はピボット空間とみなさないことに注意する．次の命題は重要である [11, 16, 20].

(2.1) **命題.**

$A : (\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ を稠密に定義された閉線形作用素とし，$0 \in \rho(A)$ とする．このとき次が成り立つ．

(i) 線形作用素 A の定義域 $\mathcal{D}(A)$ は内積を，

$$< x, y >_{\mathcal{D}(A)} := < Ax, Ay >_{\mathcal{X}} \qquad x, y \in \mathcal{D}(A),$$

のように定義すると Hilbert 空間となる．このとき A は $\mathcal{D}(A)$ から $\mathcal{X}$ への線形な位相同型作用素である．すなわち，$A \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(A); \mathcal{X})$ であり，$A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}; \mathcal{D}(A))$ である．

(ii) $\mathcal{X}$ をピボット空間とするとき，線形作用素 A の位相同型作用素としての $\mathcal{X}$ への拡張 $A_0 : \mathcal{X} \to \mathcal{R}(A_0)$ が存在する．ここで，$\mathcal{R}(A_0)$ は $\mathcal{X} \subset \mathcal{R}(A_0)$ を満たし，内積

$$< x, y >_{\mathcal{R}(A_0)} := < {A_0}^{-1} x, {A_0}^{-1} y >_{\mathcal{X}} \qquad x, y \in \mathcal{R}(A_0)$$

を持つ Hilbert 空間となる．

∎

$\mathcal{X}$ をHilbert空間とし，$A:(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ を正定作用素とする．すなわち作用素 A は稠密に定義された閉作用素で，$[0,\infty)\subset\rho(-A)$ を満たし，適当な定数 $M>0$ をとると

$$\|\lambda R(\lambda;-A)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}\leqq M$$

がすべての $\lambda\in[0,\infty)$ に対して成り立つ．このような正定作用素に対して，次のように正べきが定義される (Komatsu[6, 7]，村松 [26]).

(2.2) **定義.**

線形作用素 $A:(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ を正定作用素とし，$\alpha>0$, m を $\alpha<m$ なる整数とする．A の**正べき** $A^\alpha:(\mathcal{D}(A^\alpha)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ は

$$A^\alpha x:=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\mu^{\alpha-1}\{AR(\mu;-A)\}^m x\,d\mu,\quad x\in\mathcal{D}(A^\alpha)$$

のように定義される．ここで，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数であり，定義域 $\mathcal{D}(A^\alpha)$ は上式の右辺の積分が存在する $x\in\mathcal{X}$ 全体からなる． ∎

定義 (2.2) による A^α と $\mathcal{D}(A^\alpha)$ の定義は，$\alpha<m$ なる整数 m のとり方に依存しないことが知られている [6, 7, 26]．また，$\alpha>0$ に対して定義 (2.2) で与えられる正定作用素 A の正べき A^α は，稠密な定義域を持つ閉作用素となり，$0\in\rho(A^\alpha)$ を満たす．故に命題 (2.1)-(i) より，A^α の定義域 $\mathcal{D}(A^\alpha)$ は内積を

$$<x,y>_{\mathcal{D}(A^\alpha)}:=<A^\alpha x,A^\alpha y>_{\mathcal{X}}\quad x,y\in\mathcal{D}(A^\alpha)$$

と定義することによってHilbert空間となり，A^α は $\mathcal{D}(A^\alpha)$ から $\mathcal{X}$ への線形な位相同型作用素となる．また命題 (2.1)-(ii) より，A^α は $\mathcal{X}$ 全体への位相同型作用素としての拡張 $(A^\alpha)_0$ を持つ．この $\mathcal{X}$ 全体への拡張を用いて，正定作用素の負べきを次のように定義できる (Hinata[10]，日當 [11]).

(2.3) **定義.**

Hilbert空間 $\mathcal{X}$ をピボット空間とし，線形作用素 $A:(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ を正定作用素とし，$\alpha>0$ とする．このとき A の**負べき** $A^{-\alpha}:\mathcal{D}(A^{-\alpha})\to\mathcal{X}$ を，$x\in\mathcal{D}(A^{-\alpha}):=\mathcal{R}((A^\alpha)_0)$ に対して

$$A^{-\alpha}x:=\{(A^\alpha)_0\}^{-1}x,$$

のように定義する．ここで，定義域 $\mathcal{D}(A^{-\alpha})$ はピボット空間 $\mathcal{X}$ を包含し，次の内積を持つHilbert空間となる．

$$<x,y>_{\mathcal{D}(A^{-\alpha})}:=<A^{-\alpha}x,A^{-\alpha}y>_{\mathcal{X}}\quad x,y\in\mathcal{D}(A^{-\alpha})$$

∎

正定作用素 A の負べき $A^{-\alpha}$ が正べき A^α の逆作用素 $(A^\alpha)^{-1}:\mathcal{X}\to\mathcal{D}(A^\alpha)$ の $\mathcal{D}(A^{-\alpha})$ への一意な拡張であることは容易に分かる．また，正定作用素 $A:(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ の0べき A^0 は $\mathcal{X}$ 上の恒等作用素 I として定義する．

また次の命題は，Komatsu[6, 7] と日當 [11] より容易に示されるが，その証明は省略する．

(2.4) **命題.**

Hilbert空間 $\mathcal{X}$ をピボット空間とし，線形作用素 $A:(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ を正定作用素とし，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\mathcal{D}(A^\alpha)$ は，内積を

$$<x,y>_{\mathcal{D}(A^\alpha)}:=<A^\alpha x,A^\alpha y>_{\mathcal{X}}$$

のように定義するときHilbert空間となり，A^α は $\mathcal{D}(A^\alpha)$ から $\mathcal{X}$ への線形な位相同型作用素となる．さらに，$(A^\beta)^{-1}A^\alpha$ は $\mathcal{D}(A^\alpha)$ から $\mathcal{D}(A^\beta)$ への線形な位相同型作用素となる．

(ii) $\alpha<\beta$ とすると，次が成り立つ．

$$\mathcal{D}(A^\alpha)\overset{d}{\hookleftarrow}\mathcal{D}(A^\beta).$$

すなわち，$\mathcal{D}(A^\alpha)\overset{d}{\supset}\mathcal{D}(A^\beta)$ であり，

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A^\alpha)}\leqq k_{\beta-\alpha}\|x\|_{\mathcal{D}(A^\beta)},\ x\in\mathcal{D}(A^\beta)$$

を満たす定数 $k_{\beta-\alpha}>0$ が存在する．

(iii) $\lambda > 0$ を任意にとるとき，作用素 $\lambda I + A$ もまた正定作用素であり，定義域 $\mathcal{D}\left((\lambda I + A)^{\alpha}\right)$ は $\mathcal{D}\left(A^{\alpha}\right)$ と Hilbert 空間として等しい．すなわち $\mathcal{D}\left((\lambda I + A)^{\alpha}\right)$ と $\mathcal{D}\left(A^{\alpha}\right)$ は集合として等しく，2 つの Hilbert 空間 $\mathcal{D}\left((\lambda I + A)^{\alpha}\right)$ と $\mathcal{D}\left(A^{\alpha}\right)$ のそれぞれの内積からの誘導ノルムが同等である．

(iv) 作用素 $A_{\alpha} := (A^{\alpha-1})^{-1} A A^{\alpha-1} : (\mathcal{D}\left(A^{\alpha}\right) \subset \mathcal{D}\left(A^{\alpha-1}\right)) \to \mathcal{D}\left(A^{\alpha-1}\right)$ は正定作用素となる．また $\beta \geqq 0$ に対して，$\mathcal{D}\left((A_{\alpha})^{\beta}\right)$ と $\mathcal{D}\left(A^{\alpha+\beta-1}\right)$ は Hilbert 空間として等しく，各 $x \in \mathcal{D}\left((A_{\alpha})^{\beta}\right)$ に対して次が成り立つ．

$$(A_{\alpha})^{\beta} x = (A^{\alpha-1})^{-1} A^{\beta} A^{\alpha-1} x.$$

∎

次に，C_0-半群とその生成作用素の性質をまとめる．Hilbert 空間 $\mathcal{X}$ をピボット空間とし，$\{S(t); t \geqq 0\}$ を $\mathcal{X}$ 上の C_0-半群とすると，次式を満たす $\omega \in \mathbb{R}$ と $M_{\omega} > 0$ が存在する．

$$\| S(t) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} \leqq M_{\omega} e^{\omega t}, \quad \forall t \geqq 0$$

上式を満たす ω の下限を C_0-半群 $\{S(t);\ t \geqq 0\}$ の**発展定数**と呼ぶ．線形作用素 $A : (\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ が発展定数 ω_0 を持つ C_0-半群 $\{S(t);\ t \geqq 0\}$ の生成作用素とすると，$(\omega_0, \infty) \subset \rho(A)$ であり，各 $\omega > \omega_0$ において，

$$R(\omega; A)x = \int_0^{\infty} e^{-\omega t} S(t) x \, dt, \quad x \in \mathcal{X}$$

が成り立つ．さらに，$[0, \infty) \subset \rho(A - \omega I)$ であり，各 $\lambda > 0$ において，

$$\| \lambda R(\lambda; A - \omega I) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} \leqq M_{\omega}$$

なる定数 $M_{\omega} > 0$ が存在する．このことより，作用素 $(\omega I - A)$ は正定作用素である．故に，命題 (2.4) より次の命題が成り立つ (Hinata[10])．

(2.5) **命題.**
Hilbert 空間 $\mathcal{X}$ をピボット空間とし，線形作用素 A を発展定数 ω_0 を持つ $\mathcal{X}$ 上の C_0-半群 $\{S(t); t \geqq 0\}$ の生成作用素とし，$\omega > \omega_0$ と α, $\beta \in \mathbb{R}$ を任意にとる．このとき，次が成り立つ

(i) $\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)$ は次式によって定義される

$$< x, y >_{\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)} := \; < (\omega I - A)^{\alpha} x, (\omega I - A)^{\alpha} y >_{\mathcal{X}}$$

内積を持つ Hilbert 空間となり，$(\omega I - A)^{\alpha}$ は $\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)$ から $\mathcal{X}$ への線形な位相同型作用素である．また，$\{(\omega I - A)^{\beta}\}^{-1} (\omega I - A)^{\alpha}$ は，$\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)$ から $\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta}\right)$ への線形な位相同型作用素である．

(ii) $\alpha < \beta$ とすると，次が成り立つ．

$$\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right) \overset{d}{\hookleftarrow} \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta}\right).$$

すなわち，$\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right) \overset{d}{\supset} \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta}\right)$ であり，すべての $x \in \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta}\right)$ に対して，

$$\| x \|_{\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)} \leqq k_{\beta-\alpha} \| x \|_{\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta}\right)}$$

を満たす定数 $k_{\beta-\alpha} > 0$ が存在する．

(iii) $\lambda > \omega_0$ を任意にとるとき，作用素 $\lambda I + A$ もまた正定作用素であり，定義域 $\mathcal{D}\left((\lambda I - A)^{\alpha}\right)$ は $\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)$ と Hilbert 空間として等しい．

∎

この命題 (2.5)-(i,iii) より，各 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)$ が $\omega > \omega_0$ のとり方によらずに定義できるので，以下のように Hilbert 空間を定義する．

(2.6) $\quad \mathcal{X}_{\alpha} := \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right)$, $\omega > \omega_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

ここで，ω_0 は A が生成する半群の発展定数である．このとき，命題 (2.5)-(ii) より，

$$\mathcal{X}_{\alpha} \overset{d}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_{\beta} \quad (\alpha < \beta)$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ がピボット空間であることに注意すると，$0 < \alpha < \beta$ に対して，

$$\mathcal{X}_{-\beta} \overset{d}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_{-\alpha} \overset{d}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_0 \overset{d}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_{\alpha} \overset{d}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_{\beta}$$

が得られる．以上の議論をまとめると，以下の命題となる．

(2.7) **命題.**

Hilbert 空間 $\mathcal{X}$ をピボット空間，線形作用素 A を $\mathcal{X}$ 上の C_0-半群の生成作用素とし，各 $\alpha \in \mathbb{R}$ において，(2.6) 式で Hilbert 空間 $\mathcal{X}_\alpha$ を定義する．このとき，$\{\mathcal{X}_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ は Hilbert 空間の稠密で連続的な縮小埋め込み系列となる．すなわち，$0 < \alpha < \beta$ のとき次を満たす．

$$\mathcal{X}_{-\beta} \overset{\mathrm{d}}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_{-\alpha} \overset{\mathrm{d}}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \overset{\mathrm{d}}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_\alpha \overset{\mathrm{d}}{\hookleftarrow} \mathcal{X}_\beta$$

また，$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ のとき，任意の $\omega > \omega_0$ に対する $\mathcal{X}_\alpha$ から $\mathcal{X}_\beta$ への線形な位相同型作用素は $\{(\omega I - A)^\beta\}^{-1}(\omega I - A)^\alpha$ である．ここで，$\omega \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ である． ∎

ここで，$\mathcal{X}$ をピボット空間とはみなさないときは，$\{\mathcal{X}_\alpha;\ \alpha \geqq 0\}$ が Hilbert 空間の稠密で連続的な縮小埋め込み系列となることに注意する．さらに，次の命題も成り立つ (Hinata[10])．

(2.8) **命題.**

Hilbert 空間 $\mathcal{X}$ をピボット空間，線形作用素 $A : (\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ を発展定数 ω_0 を持つ $\mathcal{X}$ 上の C_0-半群 $\{S(t); t \geqq 0\}$ の生成作用素とし，各 $\alpha \in \mathbb{R}$ において $\mathcal{X}_\alpha$ を (2.6) 式で与えられる Hilbert 空間とする．このとき，$\omega > \omega_0$ に対して，線形作用素 A_α を次式で与えるとき，

$$A_\alpha := \{(\omega I - A)^{\alpha-1}\}^{-1} A (\omega I - A)^{\alpha-1}$$

$A_\alpha : (\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}_{\alpha-1}) \to \mathcal{X}_{\alpha-1}$ は $\omega > \omega_0$ のとり方に依存せずに定義され，発展定数 ω_0 を持つ $\mathcal{X}_{\alpha-1}$ 上の C_0-半群 $\{S_\alpha(t); t \geqq 0\}$ を生成する．さらに任意の $\lambda > \omega_0$ と各 $t \geqq 0$ において，次が成り立つ．

$$S_\alpha(t)x = \{(\lambda I - A)^{\alpha-1}\}^{-1} S(t) (\lambda I - A)^{\alpha-1} x \qquad x \in \mathcal{X}_{\alpha-1}.$$

また，$\alpha \geqq 0$ のとき，$\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}$ であり，$\mathcal{X}_\alpha$ は C_0-半群 $\{S(t);\ t \geqq 0\}$ の下で不変な部分空間である．さらに任意の $\lambda > \omega_0$ と各 $t \geqq 0$ において，$(\lambda I - A)^\alpha$ と $S(t)$ は $\mathcal{X}_\alpha$ 上で可換である．すなわち，

$$\begin{aligned} &S(t)x \in \mathcal{X}_\alpha, \quad \forall x \in \mathcal{X}_\alpha \\ &(\lambda I - A)^\alpha S(t)x = S(t)(\lambda I - A)^\alpha x\ ,\ \forall x \in \mathcal{X}_\alpha. \end{aligned}$$

∎

ここで，線形作用素の記号 A_α は，正定作用素 A に対しては命題 (2.4)-(iv) の定義を採用し，生成作用素 A に対しては上の命題の定義を採用することに注意する．

次に，ベクトル値関数について整理する．実数または複素数の領域から Banach 空間 $\mathcal{M}$ への関数を**ベクトル値関数**と呼び，特に値をとる空間を明示して **$\mathcal{M}$-値関数**と呼ぶこともある．このようなベクトル値関数の集まりの中で，以下のものは重要である．ここで，$[0, a)$ は有限区間 $[0, T)$ または無限区間 $[0, \infty)$ を意味し，$\mathcal{M}$ は Banach 空間または Hilbert 空間を意味する．

$$\begin{aligned} \mathsf{C}(0, a; \mathcal{M}) &:= \{x(\cdot) : [0, a) \to \mathcal{M}\ ;\ x(\cdot) \text{ は，} \\ &\qquad [0, a) \text{ 上で連続で，有界 }\} \\ \mathsf{C}^k(0, a; \mathcal{M}) &:= \{x(\cdot) : [0, a) \to \mathcal{M}\ ;\ x(\cdot) \text{ は，} \\ &\qquad [0, a) \text{ 上で } k \text{ 階連続微分可能 }\} \\ \mathsf{L}^p(0, a; \mathcal{M}) &:= \{x(\cdot) : [0, a) \to \mathcal{M}\ ; \\ &\qquad \int_0^a \| x(t) \|_{\mathcal{M}}^p \, dt < \infty\} \\ \mathsf{L}^\infty(0, a; \mathcal{M}) &:= \{x(\cdot) : [0, a) \to \mathcal{M}\ ; \\ &\qquad \sup_{t \in [0, a)} \| x(t) \|_{\mathcal{M}} < \infty\} \end{aligned}$$

有限区間 $[0, T)$ 上のベクトル値関数 f は，

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(t), & t \in [0, T) \\ 0, & t \in [T, \infty) \end{cases}$$

によって与えられる無限区間 $[0, \infty)$ 上の関数 $\tilde{f}$ (f の $[0, \infty)$ への**零拡張**と呼ぶ) と同一視されるので，

$$\begin{aligned} &\mathsf{C}(0, T; \mathcal{M}) \subset \mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{M}) \\ &\mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{M}) \subset \mathsf{L}^2(0, \infty; \mathcal{M}) \end{aligned}$$

が成り立つ．

$\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$をともにHilbert空間とし，線形作用素$A:(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{X}$を$\mathcal{X}$上の$C_0$-半群$\{S(t);t\geqq 0\}$の生成作用素とし，$B\in\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{X})$とする．このとき，次のような$\mathcal{X}$上の発展方程式を考える，

$$(2.9)\quad \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=x_0\in\mathcal{X}$$

ここで，$u(\cdot)$は$[0,\infty)$上の$\mathcal{U}$-値関数であり，$x(\cdot)$は$[0,\infty)$上の$\mathcal{X}$-値関数である．(2.9)式は，無限次元システム(分布入力システム)の状態方程式として知られている式である．今，$T>0$を任意にとるとき，$x_0\in\mathcal{D}(A)$と$u(\cdot)\in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{U})$に対して，次式によって$[0,T)$上の$\mathcal{X}$-値関数$x(\cdot)$を定義すると，

$$(2.10)\quad x(t):=S(t)x_0+\int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau\,,\quad t\in[0,T)$$

$x(\cdot)\in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{X})$であり，各$t\in[0,T)$において発展方程式(2.9)を満たす．このとき，$x(\cdot)$は発展方程式(2.9)の**強解**または**古典解**と呼ばれる．また，$x_0\in\mathcal{X}$と$u(\cdot)\in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$に対して，(2.10)式によって与えられる$x(\cdot)$は$x(\cdot)\in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$となり，発展方程式(2.9)をほとんど至る所(a.e.)の$t\in[0,T)$において満たす．このとき，関数$x(\cdot)$は発展方程式(2.9)の**軟解**と呼ばれる．実際，$x_0\in\mathcal{X}$と$u(\cdot)\in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$に対して，(2.10)式によって与えられる関数$x(\cdot)$は$x(\cdot)\in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{X})$となる．

最後に，ベクトル値関数のラプラス変換について整理する．Hilbert空間$\mathcal{Z}$を可分とする，すなわち，$\mathcal{Z}$内に高々可算の稠密な部分集合が存在する．このとき，$[0,\infty)$上の$\mathcal{Z}$-値関数$f(\cdot)$に対して，$e^{-\beta\cdot}f(\cdot)\in \mathsf{L}^1(0,\infty;\mathcal{Z})\cap \mathsf{L}^2(0,\infty;\mathcal{Z})$となるような$\beta\in\mathbb{R}$が存在するとき，$f$は**ラプラス変換可能関数**と呼ばれ，$f$の**ラプラス変換**$F(\cdot)$は次のように定義される(Curtain&Zwart[3])．

$$F(s)=\mathfrak{L}[f(t)](s):=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\,,\ s\in\mathbb{C}_\beta$$

ここで，$\mathbb{C}_\beta$は複素右半平面$\{s\in\mathbb{C};\ Re(s)>\beta\}$を意味する．このとき，$F(\cdot)$は$\mathbb{C}_\beta$上で解析的であり，$F(\cdot+\beta)\in \mathsf{H}^\infty(\mathcal{Z})$となる[3]．ここで，Banach空間$\mathcal{K}$に対して，$\mathsf{H}^\infty(\mathcal{K})$は，

$$\sup_{Re(s)>0}\ \|K(s)\|_{\mathcal{K}}<\infty$$

を満たす$\mathbb{C}_0$上で解析的な$\mathcal{K}$-値関数$K(\cdot)$の全体である．また，ラプラス変換$\mathfrak{L}[\cdot]$は$\mathsf{L}^2(0,\infty;\mathcal{Z})$上に連続的に拡張することもできる．このとき，Paley-Wienerの定理[3]として知られる次の定理が成り立つ．この定理は本論文において重要である．

(2.11)　**定理.**

$\mathcal{Z}$を可分なHilbert空間とするとき，ラプラス変換$\mathfrak{L}[\cdot]$は$\mathsf{L}^2(0,\infty;\mathcal{Z})$から$\mathsf{H}^2(\mathcal{Z})$への位相同型作用素である．ここで，$\mathsf{H}^2(\mathcal{Z})$は

$$\sup_{Re(\zeta)>0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\zeta+\jmath\omega)\|_{\mathcal{Z}}^2\,d\omega\right)<\infty$$

を満たす$\mathbb{C}_0$上で解析的な$\mathcal{Z}$-値関数$F(\cdot)$全体である． ∎

さらに，次の定理も知られている[3]．

(2.12)　**定理.**

$\mathcal{Z}$と$\mathcal{U}$をともに可分なHilbert空間とする．このとき，$W(\cdot)\in \mathsf{H}^\infty(\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{Z}))$に対して，作用素$\hat{\Phi}_W:\mathsf{H}^2(\mathcal{U})\ni U(\cdot)\mapsto W(\cdot)U(\cdot)$は，$\mathsf{H}^2(\mathcal{U})$から$\mathsf{H}^2(\mathcal{Z})$への有界線形作用素となる． ∎

可分なHilbert空間$\mathcal{X}$上のC_0-半群$\{S(t);t\geqq 0\}$とその生成作用素Aは，ラプラス変換により以下のように関係付けられていることが知られている(Engel&Nagel[4])．

$$(2.13)\quad \mathfrak{L}[S(t)x](s)=R(s;A)x,\quad x\in\mathcal{X},\ s\in\mathbb{C}_{\omega_0}$$

また，$R(\cdot+\omega_0;A)\in \mathsf{H}^\infty(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$であり，$R(\cdot+\omega_0;A)\in \mathsf{H}^\infty(\mathcal{B}(\mathcal{X};\mathcal{D}(A)))$である．ここで，$\omega_0$は$C_0$-半群$\{S(t);t\geqq 0\}$の発展定数である．さらに，可分なHilbert空間$\mathcal{X}$における(2.9)式のような発展方程式において，ラプラス変換を用いると，次の命題を得る．

(2.14) **命題.**

可分なHilbert空間$\mathcal{X}$において以下のような初期値0の発展方程式を考える.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=0\in\mathcal{X}$$

ここで，$B\in\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{X})$とする．このとき，$T>0$を任意にとり，$u\in\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$に対して発展方程式の解(軟解)を対応させる作用素

$$(\Phi_T u)(t):=\int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T)$$

を定義すると，Φ_Tは$\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$から$\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$への有界線形作用素となる．さらに，$\mathcal{D}(A)$を命題(2.5)-(i)のようにHilbert空間と見るとき，$\mathcal{D}(A)$も可分となり，$\Phi_T\in\mathcal{B}(\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U});\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{D}(A)))$となる．

[証明]

今，$u\in\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$に対して，

$$f(t):=\int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

とおくと，$f\in\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$となる．故に，$u$も$f$も$[0,\infty)$への零拡張と同一視して考えると，ラプラス変換可能であり，$F(\cdot)=\mathfrak{L}[f](\cdot)\in\mathsf{H}^2(\mathcal{X})$，$U(\cdot)=\mathfrak{L}[u](\cdot)\in\mathsf{H}^2(\mathcal{U})$であることがわかる．

一方，Aが生成する$\mathcal{X}$上のC_0-半群$\{S(t)\,;\,t\geq 0\}$の発展定数をω_0とし，$\omega>\omega_0$を任意にとる．このとき，任意の$x\in\mathcal{X}$に対して，$e^{-\omega\cdot}S(\cdot)x\in\mathsf{L}^2(0,\infty;\mathcal{X})$なので，そのラプラス変換は$s\in\mathbb{C}_0$において存在し，次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[e^{-\omega t}S(t)x](s)&=R(s+\omega;A)x\\&=R(s;A-\omega I)x\end{aligned}$$

各$x\in\mathcal{X}$において，$R(\cdot;A-\omega I)x\in\mathsf{H}^\infty(\mathcal{X})$なので，一様有界性定理を用いると，$R(\cdot;A-\omega I)\in\mathsf{H}^\infty(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$．以上より，

$$F(s+\omega)=R(s;A-\omega I)BU(s+\omega),\, s\in\mathbb{C}_{\omega_0}$$

が得られる．ここで，$B\in\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{X})$なので，$R(\cdot;A-\omega I)B\in\mathsf{H}^\infty(\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{X}))$であり，定理(2.12)より作用素$\hat{\Phi}_{\omega,T}:U(\cdot+\omega)\mapsto F(\cdot+\omega)$は$\mathsf{H}^2(\mathcal{U})$から$\mathsf{H}^2(\mathcal{X})$への有界作用素となる．また，

$$\mathfrak{E}[a;\mathcal{U}]:\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})\ni u\mapsto e^{a\cdot}u(\cdot)$$

が$\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$上の有界線形作用素となり，

$$\mathfrak{L}[\mathfrak{E}[-a;\mathcal{U}]u](s)=U(s+a),$$

さらにPayley-Wienerの定理(2.11)に注意すると，下の図式より，$\Phi_T\in\mathcal{B}(\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U});\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X}))$となることがわかる．

$$\begin{tikzcd}
u(\cdot) \arrow[rr, "\Phi_T"] \arrow[d, "{\mathfrak{E}[-\omega;\mathcal{U}]}"'] & & f(\cdot) \\
e^{-\omega\cdot}u(\cdot) \arrow[d, "{\mathfrak{L}[\cdot]}"'] & & e^{-\omega\cdot}f(\cdot) \arrow[u, "{\mathfrak{E}[\omega;\mathcal{X}]}"'] \\
U(\cdot+\omega) \arrow[rr, "\hat{\Phi}_{\omega,T}"] & & F(\cdot+\omega) \arrow[u, "{\mathfrak{L}^{-1}[\cdot]}"']
\end{tikzcd}$$

次に，$\mathcal{D}(A)$を命題(2.5)-(i)のHilbert空間と見ると，$A:\mathcal{D}(A)\to\mathcal{X}$が位相同型作用素なので$\mathcal{D}(A)$も可分となる．また，$R(\cdot;A-\omega I)B\in\mathsf{H}^\infty(\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{D}(A)))$に注意すると，$\hat{\Phi}_{\omega,T}\in\mathcal{B}(\mathsf{H}^2(\mathcal{U});\mathsf{H}^2(\mathcal{D}(A)))$が得られ，$F(\cdot+\omega)\in\mathsf{H}^2(\mathcal{D}(A))$となる．その後は上と同様の議論により，$\Phi_T\in\mathcal{B}(\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U});\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{D}(A)))$なる結果を得る． ∎

3 一般境界入出力システム

$\mathcal{X}$，$\mathcal{U}$を可分なHilbert空間とし，$\mathcal{X}$はその双対空間$\mathcal{X}'$と同一視されるピボット空間とする．また，$\widetilde{A}$とHはともに$\mathcal{X}$内で稠密に定義された線形作用素で，Bは$\mathcal{U}$上で定義された線形作用素とする．このとき，次式で表わされる$[0,\infty)$上のシステムを考える．

$$(3.1)\qquad \begin{cases}\dot{x}(t)=\widetilde{A}x(t), & x(0)=x_0\in\mathcal{X}\\ Hx(t)=Bu(t)\end{cases}$$

上式のようなシステムは$[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$と記述さ

れ，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{U}$ はそれぞれシステムの状態空間と入力空間，$x(\cdot)$ および $u(\cdot)$ はそれぞれシステムの状態 (関数) および入力 (関数)，B はシステムの入力作用素と呼ばれる．また，$\widetilde{A}$ の $\mathcal{D}(\widetilde{A}) \cap \mathcal{N}(H)$ への制限を A と表わし，システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ の**システム作用素**と呼ぶ．このとき，システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ に対して，次の定義を設ける．

(3.2) **定義.**

システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ が以下の条件 (i)-(iii) をすべて満たすとき，**一般境界入力システム**と呼ばれる．

(i) システム作用素 A が $\mathcal{X}$ 上の C_0-半群 $\{S(t); t \geqq 0\}$ を生成する．このとき，$\{S(t); t \geqq 0\}$ の発展定数を ω_0 とする．

(ii) 以下を満たす可分な Hilbert 空間 $\mathcal{R}_B$ が存在する．B が $\mathcal{U}$ から $\mathcal{R}_B$ への有界線形作用素となり，適当な $\omega > \omega_0$ に対して，単射な有界線形作用素 $G(\omega): \mathcal{R}_B \to \mathcal{X}$ が存在して，$\mathcal{R}(G(\omega)) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \mathcal{D}(H)$ であり，次が成り立つ．

$$(\omega I - \widetilde{A})G(\omega)v = 0, \, HG(\omega)v = v \quad \forall v \in \mathcal{R}_B.$$

このとき，$G(\omega)$ はシステムの**グリーン作用素**と呼ばれる．

(iii) 上を満たす $\omega, G(\omega)$ に対して，次を満たす正数 α が存在する．

$$\mathcal{R}(G(\omega)) \subset \mathcal{D}((\omega I - A)^{\alpha}).$$

ここで，上式を満たす α の上限を α_0 とし，**正則定数**と呼ぶ．

∎

本論文における一般境界入力システムの表現と定義は，[8–10, 13–15, 17–23] において採用されたシステムの表現と定義の拡張になっている．実際，本論文のシステム表現 (3.1) と定義 (3.2) において，Hilbert 空間 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{R}_B$ をともに $\mathcal{V}$ に，作用素 B を恒等作用素 I に置き換えたものが [8–10, 13–15, 17–23] の一般境界入力システムの表現と定義である．入力作用素 B を導入することで，より一般的なシステムの表現と定義になっている．

[8–10, 13–15, 17–23] においても示されているように，一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ に対するグリーン作用素 $G(\omega)$ は各 $\omega > \omega_0$ に対して存在し，正則定数 α_0 は $\omega > \omega_0$ のとり方によらず，システム固有のものである．この正則定数は [8, 9, 13, 14] においては，滑定数 (smoothness) と呼ばれていたものである．

一般境界入力システムのグリーン作用素に対して，次の命題が成り立つ [8, 13, 20].

(3.3) **命題.**

システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ を発展定数 ω_0，正則定数 α_0 を持つ一般境界入力システムとし，線形作用素 A をシステム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ のシステム作用素，$\omega > \omega_0$ に対する $G(\omega)$ をシステム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ のグリーン作用素とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\omega > \omega_0$ に対して，グリーン作用素 $G(\omega)$ は一意に存在し，次が成り立つ．

$$\mathcal{R}(G(\omega)) \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}.$$

(ii) 各 $\lambda > \omega_0$ に対して，グリーン作用素 $G(\lambda)$ は $G(\omega)$ と以下のように関係付けられる．

$$G(\lambda)v = (\omega I - A)(\lambda I - A)^{-1}G(\omega)v, \, \forall v \in \mathcal{R}_B.$$

さらに，任意の $\alpha \in [0, \alpha_0)$ に対して，各グリーン作用素 $G(\lambda)$ は $\mathcal{R}_B$ から $\mathcal{D}((\omega I - A)^{\alpha})$ への有界線形作用素である．

(iii) 複素右半平面 $\mathbb{C}_{\omega_0} := \{s \in \mathbb{C}; Re(s) > \omega_0\} \subset \rho(A)$ 上で以下のように定義される $\widetilde{G}(s)$ は，

$$\widetilde{G}(s)v := (\omega I - A)(sI - A)^{-1}G(\omega)v, \; v \in \mathcal{R}_B,$$

任意の $\alpha \in [0, \alpha_0)$ に対して，$\mathcal{R}_B$ から $\mathcal{D}((\omega I - A)^{\alpha})$ への有界線形作用素となり，作用素値関数 $\widetilde{G}(\cdot)$ は $G(\cdot)$ の $\mathbb{C}_{\omega_0}$ 上の解析関数としての拡張である．

∎

命題 (3.3)-(iii) より，一般境界入力システムのグリーン作用素はシステム作用素のレゾルベント集

合に含まれる複素右半平面上に解析関数として拡張できる．この拡張された $\widetilde{G}(\cdot)$ は**拡張グリーン作用素**と呼ばれる．

今，一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ において，任意の $T>0$ に対して，入力関数に状態関数を対応させる次のような線形作用素 $\Lambda_T : (\mathcal{D}(\Lambda_T) \subset L^2(0,T;\mathcal{U})) \to L^2(0,T;\mathcal{X})$ を考える．

$$(\Lambda_T u)(t) := (\omega I - A)\int_0^t S(t-\tau)G(\omega)Bu(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T),\ u \in \mathcal{D}(\Lambda_T). \tag{3.4}$$

ここで，$\omega > \omega_0$ であり，ω_0 は一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ の発展定数である．この作用素 Λ_T に関しては次が成り立つ．

(3.5)　命題.

システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ を発展定数 ω_0 を持つ一般境界入力システムとし，$T>0$ を任意にとり，(3.4) 式によって作用素 Λ_T を定義する．このとき，以下が成り立つ．

(i) 任意の $u \in \mathcal{D}(\Lambda_T)$ に対して，$\Lambda_T u$ は $\omega > \omega_0$ のとり方によらず定義される．

(ii) 任意の $u \in \mathsf{C}^2(0,T;\mathcal{U})$ に対して，以下が満たされる．

$$(\Lambda_T u) \in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{X}),$$
$$\frac{d}{dt}(\Lambda_T u)(t) = \widetilde{A}(\Lambda_T u)(t),\ \forall t \in (0,T)$$
$$H(\Lambda_T u)(t) = Bu(t),\ \forall t \in (0,T)$$

(iii) 任意の $u \in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{U})$ に対して，$\Lambda_T u \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{X})$ となり，$\Lambda_T u$ はラプラス変換可能であり，そのラプラス変換は次式のようになる．

$$\mathfrak{L}[\Lambda_T u](s) = \widetilde{G}(s)BU(s),\ s \in \mathbb{C}_{\omega_0}$$

ここで，$\widetilde{G}(\cdot)$ は，命題 (3.3)-(iii) において定義された拡張グリーン作用素であり，$U(\cdot)$ は，u のラプラス変換を意味する．

(iv) 作用素 Λ_T は $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ から $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ への有界線形作用素である．

[証明]

(i),(ii) は Inaba&Hinata[20] と同様に示すことができる．

(iii)　$u \in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{U})$ のとき，$u \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ であり，$\Lambda_T u \in \mathsf{C}(0,T:\mathcal{X})$ となることは [20] と同様に示される．今，$\Lambda_T u$ とその $[0,\infty)$ への零拡張を同一視するとき，$\Lambda_T u \in \mathsf{L}^2(0,\infty;\mathcal{X})$ なので，$\Lambda_T u$ はラプラス変換可能である．さらに，合成積のラプラス変換と (2.13) 式および命題 (3.3)-(iii) より，次式が得られる．

$$\mathfrak{L}[\Lambda_T u](s) = \widetilde{G}(s)BU(s), \quad s \in \mathbb{C}_{\omega_0}$$

ここで，$U(\cdot)$ は，u のラプラス変換である．

(iv)　再び命題 (3.3)-(iii) より，上の $\widetilde{G}(\cdot)B$ は，各 $s \in \mathbb{C}_{\omega_0}$ において $\widetilde{G}(s)B \in \mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{X})$ を満たし，$\mathbb{C}_{\omega_0}$ 上で解析的である．さらに，$\widetilde{G}(\cdot+\omega_0)B \in \mathsf{H}^\infty(\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{X}))$ である．従って，定理 (2.12) より

$$\hat{\Phi}_G : \mathsf{H}^2(\mathcal{U}) \ni u \mapsto \widetilde{G}(\cdot)BU(\cdot)$$

は，$\mathsf{H}^2(\mathcal{U})$ から $\mathsf{H}^2(\mathcal{X})$ への有界線形作用素となる．命題 (2.14) の証明中の $R(\cdot;A)B$ を $\widetilde{G}(\cdot)B$ に置き換えて同様の議論をすると，Λ_T が $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ から $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ への有界線形作用素となることがわかる．∎

この命題を用いると，一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ の解 (状態) について，以下の定理が成り立つことがわかる．

(3.6)　定理.

システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ を発展定数 ω_0 を持つ一般境界入力システムとし，$T>0$ を任意にとる．このとき，$x_0 \in \mathcal{X}$ と $u(\cdot) \in \mathcal{D}(\Lambda_T)$ に対して，次式によって関数 $x(\cdot)$ を定義する．

$$x(t) := S(t)x_0 + (\Lambda_T u)(t), \quad t \in [0,T) \tag{1}$$

ここで，Λ_T は (3.4) 式によって定義された作用素である．このとき，以下が成立する．

(i) $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, $u(\cdot) \in \mathsf{C}^2(0,T;\mathcal{U})$ に対して (1) 式で与えられる関数 $x(\cdot)$ は, システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ の古典解となる. すなわち, 以下を満たす.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \widetilde{A}x(t),\ \forall t \in (0,T), \quad x(0) = x_0, \\ Hx(t) = Bu(t),\ \forall t \in (0,T), \end{cases}$$

(ii) $x_0 \in \mathcal{X}$, $u(\cdot) \in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{U})$ に対して, (1) 式で与えられる関数 $x(\cdot)$ は, $[0,T)$ 上の $\mathcal{X}$-値連続関数である.

(iii) $x_0 \in \mathcal{X}$, $u(\cdot) \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ に対して (1) 式で与えられる関数 $x(\cdot)$ は, $x(\cdot) \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ となり, システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ の軟解と呼ばれる.

[証明]

(i),(ii) は命題 (3.5)-(i),(ii) と半群の性質より, 容易に得られる.

(iii) $x_0 \in \mathcal{X}$, $u(\cdot) \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ に対して, $x(\cdot)$ を (1) 式で与える. このとき, 命題 (3.5)-(iii) より, Λ_T が $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ から $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ への有界作用素なので, $(\Lambda_T u)(\cdot) \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ である.

一方, $S(\cdot) \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ なので, $S(\cdot)x \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{X})$ であり, $S(\cdot)x \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ である. 従って, $x(\cdot) \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ が得られる. ∎

次に, (3.1) 式のように表現される一般境界入力システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ に対して, 次のように出力方程式を付加して考える.

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \widetilde{A}x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{X} \\ Hx(t) = Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \in \mathcal{Y} \end{cases}$$

ここで, $\mathcal{Y}$ は可分な Hilbert 空間であり, $C : (\mathcal{D}(C) \subset \mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$ は線形作用素とする. 上式のように表現されるシステムは $[\widetilde{A},H,B,C;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y}]$ と記述し, $\mathcal{Y}$, C, $y(\cdot)$ はそれぞれシステム $[\widetilde{A},H,B,C;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Y}]$ の出力空間, 出力作用素, 出力 (関数) と呼ばれる. ここで, 任意の $T>0$ に対して, 入力関数に出力関数を対応させる次のような線形作用素 ${}_C\Lambda_T : (\mathcal{D}({}_C\Lambda_T) \subset L^2(0,T;\mathcal{U})) \to L^2(0,T;\mathcal{Y})$ を考える.

(3.8)
$$\begin{aligned} ({}_C\Lambda_T u)(t) &:= \\ &C(\omega I - A)\int_0^t S(t-\tau)G(\omega)Bu(\tau)d\tau, \\ &\qquad t \in [0,T),\ u \in \mathcal{D}({}_C\Lambda_T). \end{aligned}$$

ここで, $\omega > \omega_0$ であり, ω_0 は一般境界入力システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ の発展定数である. この作用素 ${}_C\Lambda_T$ を用いて次の定義を設ける.

(3.9) **定義.**

一般境界入力システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ に対して, $C : (\mathcal{D}(C) \subset \mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$ を線形作用素とし, 任意の $T>0$ に対して, 線形作用素 ${}_C\Lambda_T$ を (3.8) 式で与える. このとき, 作用素 C が一般境界入力システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ に対して**許容される出力作用素**であるとは, 作用素 ${}_C\Lambda_T$ が $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ から $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{Y})$ への有界線形作用素になることである. ∎

一般境界入力システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ に対する出力作用素の許容性については, 次の定理は重要である.

(3.10) **定理.**

$[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ を発展定数 ω_0, 正則定数 α_0 を持つ一般境界入力システムとし, $\omega > \omega_0$ とする. このとき, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{D}((\omega I - A)^{\hat{\alpha}}),\mathcal{Y})$ を満たす $\hat{\alpha} \in [0,\alpha_0)$ が存在するならば, 線形作用素 C は一般境界入力システム $[\widetilde{A},H,B;\mathcal{X},\mathcal{U}]$ に対して許容される出力作用素である.

[証明]

まず, $u \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ に対する (3.4) 式の Λ_T のラプラス変換をもう一度考える.

$$\mathfrak{L}[\Lambda_T u](s) = \widetilde{G}(s)BU(s), \quad s \in \mathbb{C}\omega_0. \qquad (1)$$

ここで, $U(\cdot)$ は u のラプラス変換である. このとき, 命題 (3.3)-(iii) より, 任意の $\omega > \omega_0$ と $\alpha \in [0,\alpha_0)$ において, $\widetilde{G}(s)B \in \mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{D}((\omega I - A)^{\alpha}))$ である.

今，$\hat{\alpha} \in [0, \alpha_0)$ に対して，$C \in \mathcal{B}(\mathcal{D}((\omega I - A)^{\hat{\alpha}}); \mathcal{Y})$ とする．このとき，$\hat{\alpha} \leqq \beta < \alpha_0$ なる β をとると，$\mathcal{D}((\omega I - A)^{\beta}) \subset \mathcal{D}((\omega I - A)^{\hat{\alpha}})$ であり，

$$C\widetilde{G}(s)B : \mathcal{U} \xrightarrow{\widetilde{G}(s)B} \mathcal{D}((\omega I - A)^{\beta}) \xrightarrow{C} \mathcal{Y}$$

は $\mathcal{U}$ から $\mathcal{Y}$ への有界作用素となり，$C\widetilde{G}(\cdot + \omega_0)B \in \mathsf{H}^{\infty}(\mathcal{B}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$ となる．従って，線形作用素：$U(\cdot) \mapsto C\widetilde{G}(\cdot)BU(\cdot)$ は，$\mathsf{H}^2(\mathcal{U})$ から $\mathsf{H}^2(\mathcal{Y})$ への有界線形作用素である．

一方，(1) 式より，

$$C\mathfrak{L}^{-1}[\widetilde{G}(s)BU(s)](t) = ({}_C\Lambda_T u)(t)$$

なので，$\mathfrak{L}[({}_C\Lambda_T u)(t)](s) = C\widetilde{G}(s)BU(s)$ となる．故に，${}_C\Lambda_T$ が $\mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{U})$ から $\mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{Y})$ への有界作用素となり，C が一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ に対して許容される出力作用素であることがわかる． ∎

上の定理からもわかるように，一般境界入力システムに対して許容される出力作用素のクラスは，その一般境界入力システムの正則定数，すなわち，グリーン作用素の滑らかさに依存する．このことより，一般境界入出力システムを考えるときは，元になる一般境界入力システムとともに考えなければならない．そこで，一般境界入出力システムを次のように定義する．

(3.11) **定義.**

(3.7) のように表現されるシステム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ が以下の条件を満たすとき，**一般境界入出力システム**であるという．

(i) システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ から出力方程式を除いた，システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ が一般境界入力システムである．

(ii) ω_0 と α_0 をそれぞれ一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ の発展定数と正則定数とするとき，次式を満たす $\omega > \omega_0$ と $\hat{\alpha} \in [0, \alpha_0)$ が存在する．

$$C \in \mathcal{B}(\mathcal{D}((\omega I - A)^{\hat{\alpha}}); \mathcal{Y})$$

このとき，上式を満たす $\hat{\alpha}$ の下限を α_{c} とおき，一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ に対する**出力許容定数**と呼ぶ．

∎

日當 [13, 14] における一般境界入出力システムの定義では出力作用素 C の条件として定義 (3.9) が採用されている．しかし，本論文では一般境界入出力システムのより詳細な特徴を明らかにできるように，[13, 14] よりも強い条件である定義 (3.11)-(ii) を採用する．実際，定義 (3.11)-(ii) によって，出力作用素の滑らかさについて議論することが可能になる．ここで，定義 (3.11)-(ii) に現れる定数 $\hat{\alpha}$ および α_{c} は $\omega > \omega_0$ の取り方によらずに定まり，任意の $\gamma > \alpha_{\mathrm{c}}$ に対して

$$C \in \mathcal{B}(\mathcal{D}((\omega I - A)^{\gamma}); \mathcal{Y}).$$

が成り立つことに注意する．また，定義 (3.11) を満たす一般境界入出力システムの出力に対して，次の定理が成り立つ．

(3.12) **定理.**

$[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ を発展定数 ω_0，正則定数 α_0，出力許容定数 α_{c} を持つ一般境界入出力システムとし，$\omega > \omega_0$，$\gamma > \alpha_{\mathrm{c}}$ と $T > 0$ を任意にとる．このとき，初期値 $x_0 \in \mathcal{D}((\omega I - A)^{\gamma})$ と入力 $u \in \mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{U})$ に対するシステム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の $[0, T)$ 上の出力 y は次式のように表現され，

$$y(t) = CS(t)x_0 + ({}_C\Lambda_T u)(t) \quad t \in [0, T) \tag{1}$$

$y \in \mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{Y})$ である．特に，$u \in \mathsf{C}^1(0, T; \mathcal{U})$ の時は，$y \in \mathsf{C}(0, T; \mathcal{Y})$ である．

[証明]

(1) 式の第 2 項が，$u \in \mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{U})$ のときに $\mathsf{L}^2(0, T; \mathcal{Y})$ に属することは，定理 (3.10) によって示されている．また，$u \in \mathsf{C}^1(0, T; \mathcal{U})$ に対しては，定理 (3.10) の証明中の議論と同様にすると，$x(t) \in \mathcal{D}((\omega I - A)^{\beta})$ がほとんど至る所の $t \in [0, T)$ において満たされる $\alpha_c \leqq \beta < \alpha_0$ が存在するこ

とがわかる．一方，命題 (3.5)-(iii) より，$x(\cdot) := (\varLambda_T u)(\cdot) \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{X})$ となるので，

$$x(t) \in \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta}\right), \forall t \in [0,T)$$

となる．さらに，$C \in \mathcal{B}\left(\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta}\right);\mathcal{Y}\right)$ なので，$({}_C\varLambda_T u)(\cdot) = C(\varLambda_T u)(\cdot)$ もまた連続となる．すなわち，$({}_C\varLambda_T u)(\cdot) \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{Y})$ となる．

次に，$x_0 \in \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\gamma}\right)$ $(\gamma > \alpha_c)$ とする．このとき，$\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\gamma}\right)$ は C_0-半群 $\{S(t); t \geqq 0\}$ の下での不変部分空間なので，

$$S(t)x_0 \in \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\gamma}\right), \forall t \geqq 0.$$

また，C が $\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\gamma}\right)$ 上で有界なので，$CS(\cdot)x_0 \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{Y}) \subset \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{Y})$ となる．これで，定理は証明される． ∎

上の定理 (3.12) において，初期値に対する条件 $x_0 \in \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\gamma}\right)$ は，初期値の影響が出力に現れるための十分条件であることに注意する．

4 数学モデルの構築

Hinata[10] と Inaba&Hinata[20] において，出力を持たない一般境界入力システムの数学モデルが議論され，ひとつの一般境界入力システムに対する数学モデルが数多く存在することが示された．ここでは，出力を付加したシステムのモデルを議論するので，すべての一般境界入出力システムに共通する数学モデルに着目し，[10, 20] の構築方法に倣って出力を持つ一般境界入出力システムの数学モデルを構築する．

$\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ を可分な Hilbert 空間とし，$\mathcal{X}$ をピボット空間とする．このとき，次式のように記述されるシステム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ が

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \widetilde{A}x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{X} \\ Hx(t) = Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

一般境界入出力システムであるとする．すなわち，このシステムは次の条件を満たす．

(4.2) **条件.**
システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ に対して，

(i) システム作用素 A が $\mathcal{X}$ 上の C_0-半群 $\{S(t); t \geqq 0\}$ を生成する．このとき，$\{S(t); t \geqq 0\}$ の発展定数を ω_0 とする．

(ii) 以下を満たす可分な Hilbert 空間 $\mathcal{R}_B$ が存在する．B が $\mathcal{U}$ から $\mathcal{R}_B$ への有界線形作用素となり，適当な $\omega > \omega_0$ に対して，単射な有界線形作用素 $G(\omega) : \mathcal{R}_B \to \mathcal{X}$ が存在して，$\mathcal{R}\left(G(\omega)\right) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \mathcal{D}(H)$ であり，次が成立する．

$$(\omega I - \widetilde{A})G(\omega)v = 0, \; HG(\omega)v = v \quad \forall v \in \mathcal{R}_B.$$

このとき，$G(\omega)$ はシステムのグリーン作用素と呼ばれる．

(iii) 上を満たす $\omega, G(\omega)$ に対して，次を満たす正数 α が存在する．

$$\mathcal{R}\left(G(\omega)\right) \subset \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right).$$

ここで，上式を満たす α の上限を α_0 とし，正則定数と呼ぶ．

(iv) $C \in \mathcal{B}\left(\mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\hat{\alpha}}\right);\mathcal{Y}\right)$ を満たす $\omega > \omega_0$ と $\hat{\alpha} \in [0, \alpha_0)$ が存在する．このような $\hat{\alpha}$ の下限を α_c とし，出力許容定数と呼ぶ．

∎

$\mathcal{X}$ がピボット空間であり，条件 (4.2)-(i) が満たされるので，命題 (2.7) より，稠密で連続的な縮小埋め込み系列 $\{\mathcal{X}_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ が存在する．ここで，

$$\mathcal{X}_\alpha := \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\alpha}\right),\ \omega > \omega_0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

である．[10, 20] において議論された数学モデルは，各 $\alpha \in [0, \alpha_0)$ に対する $\mathcal{X}_{\alpha-1}$([10, 20] においては，$\mathcal{X}_\alpha$ と表記した) 上の分布入力システムであった．これらの数学モデルはいずれも元の一般境界入力シ

ステムの状態空間 $\mathcal{X}$ よりも大きな状態空間を持っている．このように，[10, 20] ではひとつの一般境界入力システムに対して多くの数学モデルを議論したが，ここでは出力を付加したシステムを考察するために，すべての一般境界入力システムに共通の数学モデル，すなわち，[10, 20] における $\alpha = 0$ に対応する数学モデルに倣って，一般境界入出力システムの数学モデルを構築する．

まず，$\omega > \omega_0$ をとり，Hilbert 空間 $\mathcal{X}_{-1}$ と 2 つの線形作用素 A_0, Q を次のように与える．

(4.3)

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{-1} := \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{-1}\right) \supset \mathcal{X} \\ A_0 x := \{(\omega I - A)^{-1}\}^{-1} A (\omega I - A)^{-1} x, \\ \qquad x \in \mathcal{D}(A_0) := \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{0}\right) = \mathcal{X} \\ Qv := (\omega I - A_0) G(\omega) v, \\ \qquad v \in \mathcal{D}(Q) := \mathcal{R}_B \end{cases}$$

このとき，次の命題が成り立つ．

(4.4) 命題．

条件 (4.2) を満たす一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ に対して，(4.3) 式において Hilbert 空間 $\mathcal{X}_{-1}$ と線形作用素 A_0, Q を定義する．このとき，次が成り立つ．

(i) $\mathcal{X}_{-1}$，A_0, Q は $\omega > \omega_0$ の取り方に依らず定義される．

(ii) 作用素 A_0 は A の $\mathcal{X}$ への拡張であり，$\mathcal{X}_{-1}$ 上の C_0-半群 $\{S_0(t); t \geqq 0\}$ を生成する．このとき，次が満たされる．

$$S_0(t)x = \{(\omega I - A)^{-1}\}^{-1} S(t) (\omega I - A)^{-1} x \quad \forall x \in \mathcal{X}_{-1},$$

さらに，$\{S_0(t); t \geqq 0\}$ の発展定数は ω_0 である．

(iii) 作用素 Q は単射であり，次を満たす．

$$\mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{D}(A_0) = \{0\}$$
$$Q \in \mathcal{B}\left(\mathcal{R}_B; \mathcal{D}\left((\omega I - A_0)^{\alpha}\right)\right), \ \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

(iv) 次が成り立つ．

$$\mathcal{R}(QB) \cap \mathcal{D}(A_0) = \{0\}$$
$$\mathcal{N}(QB) = \mathcal{N}(B)$$
$$QB \in \mathcal{B}\left(\mathcal{U}; \mathcal{D}\left((\omega I - A_0)^{\alpha}\right)\right), \ \forall \alpha \in [0, \alpha_0)$$

(v) 各 $\omega > \omega_0$ と $\alpha > \alpha_c$ に対して，$C \in \mathcal{B}\left(\mathcal{D}\left((\omega I - A_0)^{1+\alpha}\right); \mathcal{Y}\right)$ が満たされる．

[証明]

(i)-(iii) は，[20] と同様に示すことができる．

(iv) (iii) より，

$$\mathcal{R}(QB) \cap \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{D}(A_0) = \{0\}.$$

また，Q が単射なので，$\mathcal{N}(QB) = \mathcal{N}(B)$．さらに，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}; \mathcal{R}_B)$ と (iii) を用いると，

$$QB \in \mathcal{B}\left(\mathcal{U}; \mathcal{D}\left((\omega I - A_0)^{\alpha}\right)\right), \ \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

(v) 命題 (2.4)-(iv) より，$\mathcal{D}\left((\omega I - A_0)^{\beta}\right) = \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{\beta - 1}\right)$ に注意すると，条件 (4.2)-(iv) から明らかに成り立つ． ∎

今，次のような Hilbert 空間 $\mathcal{X}_{-1}$ 上の分布入出力システム

(4.5)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + QBu(t), \ x(0) = x_0 \ \in \mathcal{X}_{-1}. \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

を考える．このとき，システムの状態 $x(\cdot)$ は，次式のように表現される．

(4.6)

$$x(t) = S_0(t)x_0 + \int_0^t S_0(t - \tau) QBu(\tau) d\tau \in \mathcal{X}_{-1}$$

ここで，Hinata[10] および Inaba&Hinata[20] と同様の議論により，システム (4.5) から出力方程式を除いた分布入力システム $(A_0, QB; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U})$ が，一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ から出力方程式を取り除いた一般境界入力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ の数学モデルとなることが分かる．すなわち，次の定理が成り立つ．

(4.7) **定理.**

システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ を条件 (4.2) を満たす一般境界入出力システムとし，分布入出力システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ を (4.3),(4.5) 両式によって与えられるシステムとする．このとき，一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ から出力方程式を取り除いたシステム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ が一般境界入力システムとなり，分布入出力システム $(A_0, QB; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U})$ から出力方程式を除いた分布入力システム $(A_0, QB; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U})$ との間に以下の事柄が成り立つ．

(i) $x_0 \in \mathcal{D}(A)$，$u \in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{U})$ に対する分布入力システム $(A_0, QB; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U})$ の状態 $x(\cdot)$ は，$[0,T)$ 上の連続関数であり，各 $t \in [0,T)$ において，次式を満たし

$$y(t) = S(t)x_0 + (\omega I - A)\int_0^t S(t-\tau)G(\omega)Bu(\tau)d\tau \in \mathcal{X}, \tag{1}$$

同じ初期値と入力に対する一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ の状態 $x(\cdot)$ と $[0,T)$ 上で一致する．

(ii) $x_0 \in \mathcal{X}$，$u \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ に対する分布入力システム $(A_0, QB; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U})$ の状態 $x(\cdot)$ は $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{X})$ に属し，同じ初期値，同じ入力に対する一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B; \mathcal{X}, \mathcal{U}]$ の状態 $x(\cdot)$ と $[0,T)$ のほとんど至る所で一致する．

[証明]

[10,20] において，$v(t)$ を $Bu(t)$ と置き換えるとよい． ∎

次に，(4.5) 式の分布入出力システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ の出力を考える．このシステムの出力 $y(t)$ は，$x(t) \in \mathcal{D}(C)$ なる t においてのみ存在する．ここで，$x(\cdot)$ は (4.6) 式で与えられるシステム (4.5) の状態である．この出力もまた，元の一般境界入出力システムの出力と一致することが，以下の定理で示される．

(4.8) **定理.**

条件 (4.2) を満たす一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ に対して，(4.3) 式によって定義される Hilbert 空間 $\mathcal{X}_{-1}$ と線形作用素 A_0，Q を用いて，(4.5) 式のような分布入出力システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ を構築する．このとき，次が成り立つ．

(i) $x_0 \in \mathcal{D}(A)$，$u \in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{U})$ に対する分布入出力システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ の出力 $y(\cdot)$ は，$[0,T)$ 上の連続関数であり，各 $t \in [0,T)$ において，次式を満たし

$$y(t) = CS(t)x_0 + C(\omega I - A)\int_0^t S(t-\tau)G(\omega)Bu(\tau)d\tau \in \mathcal{Y}, \tag{1}$$

同じ初期値と入力に対する一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の出力 $y(\cdot)$ と $[0,T)$ 上で一致する．

(ii) α_c を一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の出力許容定数とし，$\gamma > \alpha_c$ とするとき，$x_0 \in \mathcal{X}_\gamma$，$u \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ に対する分布入出力システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ の出力 $y(\cdot)$ は $\mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{Y})$ に属し，同じ初期値，同じ入力に対する一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の出力 $y(\cdot)$ と $[0,T)$ のほとんど至る所で一致する．

[証明]

一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の状態と出力をそれぞれ $x_1(\cdot)$ と $y_1(\cdot)$ とし，分布入出力システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ の状態と出力をそれぞれ $x_2(\cdot)$ と $y_2(\cdot)$ とする．

(i) $x_0 \in \mathcal{D}(A)$，$u \in \mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{U})$ とする．このとき，定理 (3.12) より，各 $t \in [0,T)$ において $x_1(t) \in \mathcal{D}(C)$ となり，$y_1(\cdot) \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{Y})$ となることに注意する．定理 (4.7)-(i) より，すべての $t \in$

$[0,T)$ において，$x_1(t) = x_2(t)$ となるので，すべての $t \in [0,T)$ において，$x_2(t) \in \mathcal{D}(C)$ であり，$y_2(t) = Cx_2(t) = Cx_1(t) = y_1(t)$ が得られる．

(ii) $\gamma > \alpha_c$ とし，$x_0 \in \mathcal{X}_\gamma$，$u \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ とする．このとき，定理 (3.12) より，ほとんど至る所の $t \in [0,T)$ において $x_1(t) \in \mathcal{D}(C)$ となり，$y_1(\cdot) \in \mathsf{L}^2(0,T;\mathcal{Y})$ となることに注意する．定理 (4.7)-(ii) より，ほとんど至る所の $t \in [0,T)$ において，$x_1(t) = x_2(t)$ となるので，ほとんど至る所の $t \in [0,T)$ において，$x_2(t) \in \mathcal{D}(C)$ であり，$y_2(t) = Cx_2(t) = Cx_1(t) = y_1(t)$ が得られる． ∎

定理 (4.8)-(ii) の初期値の条件 $x_0 \in \mathcal{X}_\gamma$ は，定理 (3.12) に見るように元の一般境界入出力システムに課された条件であることに注意する．このように，定理 (4.7) と定理 (4.8) によって，同じ初期値と入力に対して，分布入出力システム (4.5) が一般境界入出力システム (4.1) と同じ状態や出力をもつことがわかる．この意味で，(4.5) 式の分布入出力システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ を，(4.1) 式の一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の**数学モデル**と呼ぶ．

5 数学モデルのための必要十分条件

この節では，与えられた分布入出力システムに対して，それが数学モデルとなる一般境界入出力システムが存在するかどうかについて考える．

$\mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}$ を可分な Hilbert 空間とし，C，D はともに $\mathcal{Z}$ 内で定義され，C は $\mathcal{Y}$ に値をとり，D は $\mathcal{Z}$ に値をとる線形作用素で，E は $\mathcal{U}$ 上で定義され $\mathcal{Z}$ に値をとる線形作用素とする．このとき，次式で記述される $[0,\infty)$ 上の分布入出力システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ を考える．

(5.1)
$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Dz(t) + Eu(t), \quad z(0) = z_0 \in \mathcal{Z} \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

上式で記述されるシステムに対して，次の条件を設ける．

(5.2) **条件.**

(5.1) 式のように記述される分布入出力システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ に対して，以下の条件を考える．

(i) $D : (\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}$ が $\mathcal{Z}$ 上の C_0-半群を生成し，その発展定数を μ_0 とする．

(ii) $E : \mathcal{U} \to \mathcal{Z}$ は有界線形作用素で，$\mathcal{R}(E) \cap \mathcal{D}(D) = 0$ を満たす．

(iii) 以下を満たす $\mu > \mu_0$ と $\beta \in (0,1)$ が存在する．

$$\mathcal{R}(E) \subset \mathcal{D}((\mu I - D)^\beta)$$

ここで，上式を満たす β の上限を β_0 とする．

(iv) 上を満たす μ と適当な $\hat{\beta} \in [0, \beta_0)$ を取るとき，線形作用素 C が $\mathcal{D}((\mu I - D)^{1+\hat{\beta}})$ 上で有界となる．

∎

次の命題は容易に示すことが出来る．

(5.3) **命題.**

分布入出力システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ が条件 (5.2) を満たすとする．このとき，次が成り立つ．

(i) 条件 (5.2)-(iii) は，すべての $\mu > \mu_0$ に対して成立し，β_0 は $\mu > \mu_0$ の取り方に依存しない．結果として，条件 (5.2)-(iv) は，すべての $\mu > \mu_0$ に対して成立し，$\hat{\beta}$ は $\mu > \mu_0$ の取り方に依存しない．

(ii) 次を満たす Hilbert 空間 $\mathcal{U}_E$ と作用素 $E_\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}; \mathcal{U}_E)$ と単射な作用素 $E_\mathrm{G} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_E; \mathcal{Z})$ が存在する．

$$Eu = E_\mathrm{G} E_\mathrm{B} u, \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

(iii) 上を満たす $\mathcal{U}_E$ と E_G を取るとき，任意の $\beta \in [0, \beta_0)$ と $\mu > \mu_0$ に対して次が成り立つ．

$$E_\mathrm{G} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_E; \mathcal{D}((\mu I - D)^\beta))$$

[証明]

(i) 命題 (2.5)-(iii) より，容易に示される．

(ii) $\mathcal{U}_E := (\mathcal{N}(E))^{\perp}$ とすると，$\mathcal{U}_E$ は Hilbert 空間となり，

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}(E) \oplus \mathcal{U}_E$$

を満たす．ここで，2 つの作用素 E_{B}, E_{G} を

E_{B} : $\mathcal{U}$ の $\mathcal{N}(E)$ に沿った $\mathcal{U}_E$ への射影
E_{G} : 作用素 E の $\mathcal{U}_E$ への制限

のように定義すると，$E_{\mathrm{B}} \in \mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{U}_E)$, $E_{\mathrm{G}} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_E;\mathcal{Z})$ となる．また，$\mathcal{N}(E_{\mathrm{G}}) = \mathcal{N}(E) \cap \mathcal{U}_E = \{0\}$ なので，E_{G} は単射である．さらに，$u \in \mathcal{U}$ の一意分解表現 $u = u_1 + u_2 \quad (u_1 \in \mathcal{N}(E),\ u_2 \in \mathcal{U}_E)$ を用いると，次式が得られる．

$$E_{\mathrm{G}} E_{\mathrm{B}} u = E_{\mathrm{G}}\{E_{\mathrm{B}}(u_1 + u_2)\} = E_{\mathrm{G}} u_2 = E u_2$$
$$E u = E(u_1 + u_2) = E u_1 + E u_2 = E u_2$$

故に，$E = E_{\mathrm{G}} E_{\mathrm{B}}$ となる．

(iii) 任意の $\beta \in [0, \beta_0)$ と $\mu > \mu_0$ をとるとき，$(\mu I - D)^{\beta} : (\mathcal{D}((\mu I - D)^{\beta}) \subset \mathcal{Z}) \to \mathcal{Z}$ が閉作用素であり，$E_{\mathrm{G}} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_E;\mathcal{Z})$ なので，$(\mu I - D)^{\beta} E_{\mathrm{G}}$ もまた閉作用素になる．また，E_{G} の定義と条件 (5.2)-(iii) より，$\mathcal{R}(E_{\mathrm{G}}) \subset \mathcal{D}((\mu I - D)^{\beta})$ であり，$\mathcal{D}((\mu I - D)^{\beta} E_{\mathrm{G}}) = \mathcal{U}_E$ となるので，閉グラフ定理より $(\mu I - D)^{\beta} E_{\mathrm{G}} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_E;\mathcal{Z})$ となる．さらに，$\{(\mu I - D)^{\beta}\}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z};\mathcal{D}((\mu I - D)^{\beta}))$ なので，

$$E_{\mathrm{G}} = \{(\mu I - D)^{\beta}\}^{-1}\{(\mu I - D)^{\beta} E_{\mathrm{G}}\}$$

より，$E_{\mathrm{G}} \in \mathcal{B}(\mathcal{U}_E;\mathcal{D}((\mu I - D)^{\beta}))$ となる． ∎

この命題に基づいて，条件 (5.2) を満たす分布入出力システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ に対して，次のような Hilbert 空間と線形作用素を定義する．

(5.4)

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_1 := \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{Z} \\ \mathcal{U}_E := (\mathcal{N}(E))^{\perp} \\ D_2 z := D z,\ z \in \mathcal{D}(D_2) := \mathcal{D}(D^2) \\ E_{\mathrm{B}} u := u_2,\ u = u_1 + u_2 \in \mathcal{N}(E) \oplus \mathcal{U}_E \\ E_{\mathrm{G}} u_2 := E u_2,\ u_2 \in \mathcal{D}(E_{\mathrm{G}}) := \mathcal{U}_E \subset \mathcal{U} \\ K(\mu) u_2 := (\mu I - D)^{-1} E_{\mathrm{G}} u_2, \\ \qquad\qquad u_2 \in \mathcal{D}(K(\mu)) := \mathcal{U}_E,\ \mu > \mu_0 \end{cases}$$

このとき，次の命題が証明できる．

(5.5) **命題.**

条件 (5.2) を満たす分布入出力システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ に対して，(5.4) 式によって Hilbert 空間と線形作用素を定義する．このとき，次が成り立つ．

(i) 線形作用素 D_2 は，Hilbert 空間 $\mathcal{Z}_1$ 上の C_0-半群を生成し，その半群の発展定数は μ_0 である．

(ii) 各 $\mu > \mu_0$ に対して，$K(\mu) : \mathcal{U}_E \to \mathcal{Z}_1$ は単射で有界であり，

$$\mathcal{R}(K(\mu)) \subset \mathcal{D}((\mu I - D_2)^{\beta}),\ \forall \beta \in [0, \beta_0)$$

(iii) 任意の λ, $\mu > \mu_0$ と $\beta \in [0, \beta_0)$ に対して，$\mathcal{R}(K(\lambda)) \subset \mathcal{D}((\mu I - D_2)^{\beta})$ となり，各 $u_2 \in \mathcal{U}_E$ において次が成り立つ．

$$K(\lambda) u_2 = K(\mu) u_2 - (\lambda - \mu)(\lambda I - D_2)^{-1} K(\mu) u_2$$

(iv) 各 $\mu > \mu_0$ において，$\mathcal{D}(D_2) \cap \mathcal{R}(K(\mu)) = \{0\}$ であり，

$$\widetilde{\mathcal{Z}_2} := \mathcal{D}(D_2) \oplus \mathcal{R}(K(\mu))$$

とするとき，$\widetilde{\mathcal{Z}_2}$ は $\mu > \mu_0$ の取り方に依存しない線形部分空間となる．さらに，任意の $z \in \widetilde{\mathcal{Z}_2}$ に対して，

$$z_{\mu} := z - K(\mu) u_2 \in \mathcal{D}(D_2)$$

を満たす $u_2 \in \mathcal{U}_E$ を $\mu > \mu_0$ に関係なく一意に取ることが出来る．

(v) $\mu > \mu_0$ とするとき，線形作用素 C が $\mathcal{D}((\mu I - D_2)^{\hat{\beta}})$ 上で有界になる．ここで，$\hat{\beta}$ は条件 (5.2)-(iv) に現れた定数である．

[証明]

(i) 命題 (2.8) において，$\mathcal{X}$ を $\mathcal{Z}$，A を D，$\alpha = 2$ と置くとよい．

(ii) $\mu > \mu_0$ をとる．このとき，E_G も $(\mu I - D)^{-1}$ も単射で有界なので，$K(\mu)$ も単射で有界となる．また，命題 (5.3)-(iii) と $(\mu I - D)^{-1} : \mathcal{D}((\mu I - D)^{\beta}) \to \mathcal{D}((\mu I - D_2)^{\beta})$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(K(\mu)) &= \mathcal{R}((\mu I - D)^{-1} E_G) \\ &\subset \mathcal{D}((\mu I - D_2)^{\beta})\end{aligned}$$

が得られる．

(iii) 任意の λ, $\mu > \mu_0$ と $\beta \in [0, \beta_0)$ をとるとき，(5.4) 式の $K(\cdot)$ の定義より，

$$(\mu I - D)K(\mu)u_2 = (\lambda I - D)K(\lambda)u_2, \ \forall u_2 \in \mathcal{U}_E$$

が成り立つ．上式と $(\lambda I - D)^{-1}K(\mu) = (\lambda I - D_2)^{-1}K(\mu)$ より，各 $u_2 \in \mathcal{U}_E$ に対して，

$$K(\lambda)u_2 = K(\mu)u_2 - (\lambda - \mu)(\lambda I - D_2)^{-1}K(\mu)u_2$$

が得られる．さらに，(ii) と $\beta < 1$ に注意すると，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(K(\lambda)) &\subset \mathcal{R}(K(\mu)) + \mathcal{D}(D_2) \\ &\subset \mathcal{D}((\mu I - D_2)^{\beta})\end{aligned}$$

(iv) $\mu > \mu_0$ とし，$z \in \mathcal{D}(D_2) \cap \mathcal{R}(K(\mu))$ とすると，$K(\mu)$ の定義より，$(\mu I - D)z \in \mathcal{D}(D) \cap \mathcal{R}(E_G)$ となる．ここで，条件 (5.2)-(ii) を用いると，$z = 0$ を得る．今，

$$\widetilde{\mathcal{Z}_2} := \mathcal{D}(D_2) \oplus \mathcal{R}(K(\mu))$$

とするとき，(iii) より，任意の $\lambda > \mu_0$ に対して，

$$\mathcal{R}(K(\lambda)) \subset \mathcal{D}(D_2) \oplus \mathcal{R}(K(\mu))$$

より，$\widetilde{\mathcal{Z}_2}$ の定義が $\mu > \mu_0$ のとり方に依らないことがわかる．

次に，$z \in \widetilde{\mathcal{Z}_2}$ に対して，z_μ, $z_\lambda \in \mathcal{D}(D_2)$, v_μ, $v_\lambda \in \mathcal{U}_E$ をとり，

$$z = z_\mu + K(\mu)v_\mu = z_\lambda + K(\lambda)v_\lambda$$

とするとき，$v_\mu = v_\lambda$ を示す．

(iii) より，

$$K(\lambda)v_\lambda = K(\mu)v_\lambda - (\lambda - \mu)(\lambda I - D_2)^{-1}K(\mu)v_\lambda$$

となるので，直和空間の分解表現の一意性より，

$$\begin{aligned}z_\mu &= z_\lambda - (\lambda - \mu)(\lambda I - D_2)^{-1}K(\mu)v_\lambda \\ K(\mu)v_\mu &= K(\mu)v_\lambda\end{aligned}$$

を得る．ここで，$K(\mu)$ の単射性を用いると，$v_\mu = v_\lambda$ となる．

(v) $\mu > \mu_0$ とする．このとき，$\mathcal{D}((\mu I - D_2)^{\hat{\beta}})$ が $\mathcal{D}((\mu I - D)^{1+\hat{\beta}})$ と Hilbert 空間として等しいので，主張は証明される． ∎

$\widetilde{\mathcal{Z}_2}$ を命題 (5.5)-(iv) において定義された $\mathcal{Z}_1$ 内の線形部分空間とし，$\mu > \mu_0$ を任意に取る．このとき，命題 (5.5)-(iv) において示されるように，$\widetilde{\mathcal{Z}_2}$ の元 z の一意分解 $z = z_\mu + K(\mu)v$ $(z_\mu \in \mathcal{D}(D_2),\ v \in \mathcal{U}_E)$ に従って，ともに $\widetilde{\mathcal{Z}_2}$ を定義域とする 2 つの作用素を以下のように定義する．

$$(5.6) \qquad \begin{cases} \widetilde{D_2}z := D_2 z_\mu + \mu K(\mu)v \\ Jz := v \end{cases}$$

このとき，次の定理が成り立つ．

(5.7) 定理.

条件 (5.2) を満たす分布入出力システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ に対して，(5.4) 式と (5.6) 式によって Hilbert 空間と線形作用素を定義する．このとき，次式で記述するシステム $[\widetilde{D_2}, J, E_B, C; \mathcal{Z}_1, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \widetilde{D_2}z(t),\ z(0) = z_0 \in \mathcal{Z}_1 \\ Jz(t) = E_B u(t), \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

は，発展定数 μ_0，正則定数 β_0 を持つ一般境界入出力システムとなる．

[証明]

実際，システム $[\widetilde{D_2}, J, E_B, C; \mathcal{Z}_1, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ のシステム作用素が D_2 であり，$\mathcal{U}_E$ が定義 (3.2)-(ii) における Hilbert 空間 $\mathcal{R}_B$ に対応し，グリーン作用

素は $\mu > \mu_0$ に対する $K(\mu)$ となり，(5.6) 式より，$v \in \mathcal{U}_E$ に対して，

$$(\mu I - \widetilde{D_2})K(\mu)v = \mu K(\mu)v - \mu K(\mu)v = 0$$
$$JK(\mu)v = v$$

また，命題 (5.5)-(ii) より，$K(\mu)$ が定義 (3.2)-(iii) を満たすことがわかる．さらに，命題 (5.5)-(v) より，定義 (3.11)-(ii) を満たすことがわかる．従って，システム $[\widetilde{D_2}, J, E_{\mathrm{B}}, C; \mathcal{Z}_1, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ は一般境界入出力システムとなる． ∎

さらに，次の定理も成り立つ．

(5.8) **定理.**

与えられた分布入出力システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ が一つの一般境界入力システムの数学モデルになるための必要十分条件は，システム $(D, E, C; \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ が条件 (5.2) を満たす事である．

[証明]

十分性は定理 (5.7) に，必要性は命題 (4.4) によって示された． ∎

6 同値な分布入出力システム

4 節では，同じ初期値と入力に対して一般境界入出力システムの状態および出力とまったく同じ状態および出力を持つ分布入出力システムを構築し，それを一般境界入出力システムの数学モデルとして導入した．しかし，そのために状態空間を元の一般境界入出力システムのそれよりも拡大しなければならなかった．本節では，一般境界入出力システムと同じ状態空間内に，4 節の数学モデルに同値な分布入出力システム構築し，結果として元の一般境界入出力システムと同じ状態空間に同値な分布入出力システムを得る．

$\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ を可分な Hilbert 空間とし，$\mathcal{X}$ をピボット空間とする．このとき，次式で表現されるシステム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ を一般境界入出力システムとする．

$$(6.1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \widetilde{A}x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{X} \\ Hx(t) = Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

すなわち，システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ が条件 (4.2) を満たす．この一般境界入出力システムに対して，4 節の手法によって構築された数学モデル $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ は以下のシステムである．

(6.2)
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + QBu(t),\ x(0) = x_0 \ \in \mathcal{X}_{-1}. \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

ここで，ω_0 を一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の発展定数とし，$\omega > \omega_0$，A と $G(\omega)$ をそれぞれ $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ のシステム作用素とグリーン作用素とするとき，Hilbert 空間 $\mathcal{X}_{-1}$ と作用素 A_0，Q は次式のように与えられる．

(6.3)
$$\begin{cases} \mathcal{X}_{-1} = \mathcal{D}\left((\omega I - A)^{-1}\right) \\ A_0 x = \{(\omega I - A)^{-1}\}^{-1} A(\omega I - A)^{-1}x, \\ \qquad x \in \mathcal{D}\left(A_0\right) = \mathcal{D}\left((\omega I - A)^0\right) = \mathcal{X} \\ Q\tilde{u} = (\omega I - A_0)G(\omega)\tilde{u}, \\ \qquad \tilde{u} \in \mathcal{D}\left(Q\right) = \mathcal{R}_B \end{cases}$$

このとき，(6.3) 式で与えられる空間および線形作用素に関して命題 (4.4) が成り立つことに注意する．さらに，$\mathcal{X}$ がピボット空間であり，条件 (4.2)-(i) を満たすので，Hilbert 空間の稠密で連続的な縮小埋め込み系列 $\{\mathcal{X}_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ が存在することにも注意する．

今，$\lambda > \omega_0$ と $\gamma \in (\alpha_c, \alpha_0)$ を任意にとり，

$$(6.4) \qquad Z_{\lambda,\gamma} := \{(\lambda I - A_0)^{1-\gamma}\}^{-1}$$

とすると，命題 (2.4)-(iv) より，$\mathcal{D}\left((\lambda I - A_0)^{1-\gamma}\right) = \mathcal{D}\left((\lambda I - A)^{-\gamma}\right)$ なので，$Z_{\lambda,\gamma}$ は $\mathcal{X}_{-1}$ から $\mathcal{X}_{-\gamma}$ への位相同型写像である．このとき，数学モデル $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ の状態 $x(\cdot)$ の位相同型変換 $z(t) = Z_{\lambda,\gamma}x(t) \quad (t \geqq 0)$ による同値なシステムは

次式のようになる．

(6.5)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Z_{\lambda,\gamma}A_0 Z_{\lambda,\gamma}{}^{-1}z(t) + Z_{\lambda,\gamma}QBu(t), \\ \qquad\qquad z(0) = Z_{\lambda,\gamma}x_0 \in \mathcal{X}_{-\gamma} \\ y(t) = CZ_{\lambda,\gamma}{}^{-1}z(t). \end{cases}$$

この $\mathcal{X}_{-\gamma}$ 上の同値なシステム (6.5) の状態 $z(\cdot)$ は次式で表現される．

(6.6)

$$\begin{aligned} z(t) &= Z_{\lambda,\gamma}S_0(t)x(0) \\ &\quad + \int_0^t Z_{\lambda,\gamma}S_0(t-\tau)Z_{\lambda,\gamma}{}^{-1}Z_{\lambda,\gamma}QBu(\tau) \end{aligned}$$

ここで，$\{S_0(t); t \geqq 0\}$ は A_0 が生成する $\mathcal{X}_{-1}$ 上の C_0-半群である．このとき，次の命題が容易に示される．

(6.7) 命題.

Hilbert 空間 $\mathcal{X}_{-1}$ と線形作用素 A_0，Q，$Z_{\lambda,\gamma}$ を (6.3) 式と (6.4) 式で与えられるものとし，$\{S_0(t); t \geqq 0\}$ を A_0 が生成する $\mathcal{X}_{-1}$ 上の C_0-半群とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) 任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して，次が成り立つ．

$$Z_{\lambda,\gamma}{}^{-1}x = (\lambda I - A)^{\gamma-1}x$$

(ii) 任意の $t \geqq 0$，$x \in \mathcal{X}$ に対して，次が成り立つ．

$$Z_{\lambda,\gamma}S_0(t)x = S(t)(\lambda I - A)^{\gamma-1}x.$$

(iii) 任意の $u \in \mathcal{U}$ に対して，次が成り立つ．

$$Z_{\lambda,\gamma}QBu = (\lambda I - A)^{\gamma}G(\lambda)Bu$$

(iv) 任意の $T > 0$ において，次式において作用素 Θ_T を定義すると，

$$\begin{aligned} &(\Theta_T u)(t) := \\ &\quad \int_0^t S(t-\tau)(\lambda I - A)^{\gamma}G(\lambda)Bu(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

Θ_T は $\mathrm{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ から $\mathrm{L}^2(0,T;\mathcal{D}(A))$ への有界線形作用素である．

[証明]

(i)　$\mathcal{X}$ がピボット空間であり，$\gamma - 1 < 0$ なので，$\mathcal{X} \subset \mathcal{D}((\lambda I - A)^{\gamma-1})$ より，$x \in \mathcal{X}$ に対して，$\{(\lambda I - A_0)^{1-\gamma}\}^{-1}x = (\lambda I - A)^{\gamma-1}x$ となる．

(ii)　任意の $t \geqq 0$，$x \in \mathcal{X}$ において，$(\lambda I - A)^{\gamma-1}x \in \mathcal{X}_{1-\gamma} \subset \mathcal{X}$ であり，また $\mathcal{X}_{1-\gamma}$ が $S(t)$ の下で不変であり，$(\lambda I - A)^{1-\gamma}$ と $S(t)$ は $\mathcal{X}_{1-\gamma}$ 上で可換なので，

$$\begin{aligned} &Z_{\lambda,\gamma}{}^{-1}S(t)(\lambda I - A)^{\gamma-1}x \\ &\quad = \{(\lambda I - A)^{\gamma-1}\}^{-1}S(t)(\lambda I - A)^{\gamma-1}x \\ &\quad = (\lambda I - A)^{1-\gamma}S(t)(\lambda I - A)^{\gamma-1}x \\ &\quad = S(t)(\lambda I - A)^{1-\gamma}(\lambda I - A)^{\gamma-1}x \\ &\quad = S(t)x = S_0(t)x \end{aligned}$$

これで，(ii) が示された．

(iii)　$\lambda > \omega_0$，$u \in \mathcal{U}$ とする．このとき，$Q = (\lambda I - A_0)G(\lambda)$ となることに注意すると，$\gamma < \alpha_0$ なので，$G(\lambda)Bu \in \mathcal{D}((\lambda I - A)^{\gamma})$ となる．また，$z \in \mathcal{D}((\lambda I - A)^{\gamma})$ において，

$$\begin{aligned} &Z_{\lambda,\gamma}(\lambda I - A_0)z \\ &\quad = \{(\lambda I - A_0)^{1-\gamma}\}^{-1}(\lambda I - A_0)z \\ &\quad = (\lambda I - A_0)^{\gamma-1}(\lambda I - A_0)z \\ &\quad = (\lambda I - A_0)^{\gamma}z = (\lambda I - A)^{\gamma}z \end{aligned}$$

故に，$Z_{\lambda,\gamma}QBu = (\lambda I - A)^{\gamma}G(\lambda)Bu$.

(iv)　$U(s) = \mathfrak{L}[u]$ とすると，$\Theta_T u$ のラプラス変換は，$s \in \mathbb{C}_{\omega_0}$ において

$$\mathfrak{L}[\Theta_T u](s) = R(s;A)(\lambda I - A)^{\gamma}G(\lambda)BU(s)$$

となる．ここで，$R(\cdot + \omega_0; A)(\lambda I - A)^{\gamma}G(\lambda)B \in \mathrm{H}^{\infty}(\mathcal{B}(\mathcal{U};\mathcal{D}(A)))$ なので，Θ_T は $\mathrm{L}^2(0,T;\mathcal{U})$ から $\mathrm{L}^2(0,T;\mathcal{D}(A))$ への有界線形作用素となる．∎

この命題より，$x(0) \in \mathcal{X}$ のとき，(6.6) 式で表わされる同値システムの状態 $z(\cdot)$ は次のように書き換えられる．

(6.8)

$$\begin{aligned} z(t) &= S(t)(\lambda I - A)^{\gamma-1}x_0 \\ &\quad + \int_0^t S(t-\tau)(\lambda I - A)^{\gamma}G(\lambda)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

今，$x_0 \in \mathcal{X}_\gamma$，すなわち，$(\lambda I - A)^{\gamma-1}x_0 \in \mathcal{D}(A)$ と $u \in \mathsf{C}(0,T;\mathcal{U})$ のとき，上式の $z(\cdot)$ は $\mathsf{C}^1(0,T;\mathcal{X})$ に属し，次の分布入力システムの古典解 (状態) となる．

$$(6.9)\quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + (\lambda I - A)^\gamma G(\lambda)Bu(t) \\ z(0) = (\lambda I - A)^{\gamma-1}x(0) \end{cases}$$

また，(6.8) の積分項は，$u \in \mathsf{L}^2(0,\dot{T};\mathcal{U})$ に対しても t の連続関数となるので，(6.8) 式の $z(\cdot)$ は上の分布入力システム (6.9) の軟解である．実際，命題 (6.7)-(iv) より，ほとんど至る所の $t \in [0,T)$ において，$z(t) \in \mathcal{D}(A)$ である．さらに，$\gamma \in (\alpha_c, \alpha_0)$ と $C(\lambda I - A)^{1-\gamma} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(A);\mathcal{Y})$ より，(6.5) の出力方程式は次のように書き換えることができる．

$$y(t) = CZ_{\lambda,\gamma}{}^{-1}z(t) = C(\lambda I - A)^{1-\gamma}z(t).$$

このように，初期状態 x_0 を $\mathcal{X}_\gamma$ 内に制限したとき，数学モデル $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ に位相同型写像 $Z_{\lambda,\gamma}$ を適用して得られる同値なシステム (6.5) は，$\mathcal{X}$ 内のシステムとして

$$(6.10)\quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + (\lambda I - A)^\gamma G(\lambda)Bu(t) \\ \qquad z(0) = (\lambda I - A)^{\gamma-1}x_0 \in \mathcal{D}(A) \\ y(t) = C(\lambda I - A)^{1-\gamma}z(t),\ t \geqq 0. \end{cases}$$

のように記述できる．このとき，システム $(A_0, QB, C; \mathcal{X}_{-1}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ が $\mathcal{X}$ 内の一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の数学モデルであることを考えると，これまでの議論より次の定理が得られる．

(6.11) **定理.**

発展定数 ω_0，正則定数 α_0，出力許容定数 α_c を持つ一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ に対して，$\lambda > \omega_0$，$\gamma \in (\alpha_c, \alpha_0)$ を任意に取り，$x_0 \in \mathcal{X}_\gamma$ とする．このとき，一般境界入出力システム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ と (6.9) 式で表わされる $\mathcal{X}$ 内の分布入出力システム $(A, (\lambda I - A)^\gamma G(\lambda)B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ は同値なシステムとなる．実際，両システムの状態は次式で関係付けられる．

$$z(t) = (\lambda I - A)^{\gamma-1}x(t), \quad (t \geqq 0).$$

ここで，$z(\cdot)$ はシステム $(A, (\lambda I - A)^\gamma G(\lambda)B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ の状態であり，$x(\cdot)$ はシステム $[\widetilde{A}, H, B, C; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ の状態である． ∎

ここで，初期状態に課された条件 $x_0 \in \mathcal{X}_\gamma$ は，元の一般境界入出力システムに課された条件と同等のものであることに注意する．

7 おわりに

入力作用素を設けていなかったこれまでの一般境界入力システムでは，同じ境界条件であっても境界の一部から入力する場合には，グリーン作用素を変更する必要があった．しかし，今回の入力作用素を設けた一般境界入力システムの定義では，グリーン作用素は純粋にシステム作用素と境界条件でのみ決定されることになり，入力の仕方は入力作用素の置き換えで対応できるようになる．また，入力から状態への影響 (作用素) をラプラス変換を用いて再検討したことにより，Inaba&Hinata[20] より詳細な結論を得ることができた．さらに，出力も併せた一般境界入出力システムを厳密に定義し，それに対する数学モデルを構築した．[10, 15, 17–23] においては出力は考慮していなかったが，ひとつの一般境界入力システムが持つ数学モデルの多様性を示す結果を得ていた．しかし，本論文では出力を考え合わせるために，その多様性を犠牲にして状態空間を最大限に拡大した．

また，Hinata[10] 等における数学モデルであるための必要十分条件の議論が，出力を持つ一般境界入出力システムに対してまで拡張され，予想された結果を得た．その中で，分布入出力システムの入力作用素から一般境界入出力システム入力作用素とグリーン作用素を分離する部分は，[10] 等においても議論していなかったところである．

最後に議論した同値なシステムは，Hinata[9] に

おいて議論した「もうひとつの等価な分布入力システムのクラス」(Another class of equivalent distributed input systems) に相当するものである．そこでは，有界な出力作用素も含めて議論していたが，本論文では非有界な出力作用素も想定している．いずれにしても，状態空間を拡大することなく，一般境界入出力システムと同じような分布入出力システムが得られることの意義は大きい．

本論文によって，一般境界入出力システムの基本的な特性や分布入出力システムとしての数学モデルの表現や特性も明らかとなった．今後は，出力を持った数学モデルの多様性を示し，フィードバック特性や可制御性や可観測性など，一般境界入出力システムとしての特性を明らかにしていく必要がある．

謝辞

境界入力システムに関する著者の研究を，最初から今日まで変わることなく，適切なアドバイスや指導で支えて頂いた東京電機大学稲葉博教授に感謝します．

参考文献

[1] Balakrishnan, A. V.; Boundary control of parabolic equations: L-Q-R theory, Proc. Conf. Theory of Nonlinear Equations, published by Academie-Verlag (1978)

[2] Curtain, R. F.; "The Salamon-Weiss class of well-posed infinite-dimensional linear system: a survey", IMA J. Math. Cont. Inf., 14, 207-223, 1997

[3] Curtain, R. F. and Zwart, H. J.; An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, 1995

[4] Engel, K.-J. and Nagel, R.; One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations,Graduate Texts in Mathematics vol. 194, Springer, 2000

[5] Fattorini, H. O.; "Boundary Control Systems", SIAM J. Cont., 6, 349-358, 1968

[6] Komatsu, H.; Fractional powers of operators, Pacific J. Math., 19, pp.285-346. (1966)

[7] Komatsu, H.; Fractional powers of operators, II Interpolation spaces, Pacific J. Math., 21, pp.89-111. (1966)

[8] Hinata, H.; "Bounded feedback for general boundary input systems", Proceedings of the 3rd Asian Control Conference, 658-663, 2000

[9] Hinata, H.; "Distributed input systems equivalent to general boundary input systems with bounded outputs", Proceedings of the 1999 American Control Conference, 3, 2227-2231, 1999

[10] Hinata, H.; "Characterization of distributed input systems equivalent to general boundary input systems", Proc. Int. Conf. Control'98, pp.1242-1247, 1998

[11] 日當明男; "Hilbert 空間内の正定作用素の分数べきに関する一考察", 長崎総合科学大学紀要, 36, 165-178, 1995

[12] 日當明男; "境界入力システムの有界作用素によるフィードバック特性", 長崎総合科学大学紀要, 33, 55-62, 1992

[13] 日當明男; "一般境界入出力システムのモデル化について", 第 22 回 SICE Dynamical System Theory シンポジウム前刷, 241-244, 1999

[14] 日當明男; "一般境界入力システムに対して許容される出力作用素", 第42回自動制御連合講演会前刷, 295-296, 1999

[15] 日當明男; "境界入力システムの諸性質", 第14回SICE Dynamical System Theory シンポジウム前刷, 335-338, 1991

[16] Hinata, H. and Inaba, H.; "A General Mathematical Model for Linear Boundary Input Systems in Hilbert Spaces", Reserch Report TDU-IS-2, Department of Information Sciences, Tokyo Denki University, 1987

[17] 日當明男, 稲葉博; "境界入力システムに等価な分布入力システムとそれらの可制御性", 第9回SICE Dynamical System Theory シンポジウム前刷, 9-12, 1986

[18] 日當明男, 稲葉博; "分布入力システムに等価な境界入力システム", 第29回自動制御連合講演会前刷, 221-222, 1986

[19] Hinata, H. and Inaba, H.; "A Mathematical Model for Boundary Control Systems in Hilbert Space", 第8回SICE Dynamical System Theory シンポジウム前刷, 171-176, 1985

[20] Inaba, H. and Hinata, H.; "A mathematical model for boundary input systems", *Proc. 32nd IEEE CDC*, 1854-1859, 1993

[21] Inaba, H. and Hianta, H.; "Stochastic boundary input systems", Systems and Control, Edited by T. Ono and F. Kozin, Mita Press, 111-125, 1991

[22] Inaba, H. and Hinata, H.; "Stochastic Boundary Input Systems", Reserch Report TDU-IS-15, Department of Information Sciences, Tokyo Denki University, 1990

[23] Inaba, H. and Hinata, H.; "A mathematical model for boundary input systems in Banach space", Sixth-Seventh Seminars on Applied Functional Analysis, 27-32 , 1984

[24] Lasiecka, I.; Unified theory for abstract parabolic boundary problems - A semigroup approach, Appl. Math. Optim., 6, pp.287-333 (1980)

[25] Lasiecka, I. and Triggiani, R.; Feedback semigroup and cosine operators for boundary feedback parabolic and hyperbolic equations, J. Diff. Eq., 47, pp.246-272 (1983)

[26] 村松壽延; 補間空間論と線型作用素, 紀伊国屋, 1985

[27] Pazy, A.; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences vol. 44, Springer-Verlag, 1983

[28] Salamon, D.; "Infinite dimensional linear systems with unbounded control and observation: A functional analytic approach", Trans. AMS, 300, 383-431, 1987

[29] Weiss, G., "Admissibility of unbounded control operators", SIAM J. Cont. Optim., 27, 527-545, 1989

[30] Weiss, G.; "Admissible observation operators for linear simigroups", Israel J. Math., 65, 17-43, 1989

[31] Weiss, G.; "The representation of regular linear systems on Hilbert spaces", Int. Ser. Nume. Math., 91, 401-416, 1989

[32] Weiss, G.; "Regular linear systems with feedback", Math. Cont. Sig. Sys., 7, 23-57, 1994