有限温度のトラップ Bose-Einstein 凝縮体低エネルギー集団励起の理論

大　矢　正　人*

Theory of Low-Energy Collective Excitations in a Trapped Bose-Einstein Condensate at Finite Temperatures

OHYA Masato

We present the theory of low-energy collective excitations of a trapped Bose-Einstein condensate which includes the dynamics of thermal quasiparticles. A general expression of the mode frequency and the damping rate is obtained for trapped Bose gases at finite temperatures.

第1章　序　　論

原子気体のBose-Einstein凝縮（BEC）の実現[1)2)3)]は，有限温度で非一様なボーズ凝縮体を実験的かつ理論的に研究する材料を提供した。現在，原子気体でBECが実現している原子は ^{1}H，^{4}He，^{7}Li，^{23}Na，^{85}Rb，^{87}Rb などである。それ以前にBECが実現していたのは，液体Heであり，一様なボーズ凝縮体であった。両者を比較すると，気体と液体，非一様性と一様性という点に相違点がある。一般的に理論的取り扱いは液体より気体の方が簡単であり，非一様性である点を考慮すれば，実験と理論の比較が定性的のみならず定量的にも可能となる。本論文ではトラップポテンシャル中で弱い斥力相互作用を行うボーズ原子気体を考え，熱的準粒子が存在する有限温度でボーズ凝縮体の低エネルギー集団励起のモード周波数と減衰割合を求める。

トラップされたボーズ凝縮体の低エネルギー集団励起は ^{87}Rb[4)] と ^{23}Na[5)] で観測されている。Jinら[6)]は ^{87}Rb の実験により集団励起の周波数と減衰割合の温度依存性を測定した。集団励起はトラップ対称軸上に写影した角運動量量子数 m によって分類され，$m=0$ モードと $m=2$ モードの周波数は温度によって大きく変化し，温度上昇により $m=0$ モードの周波数は増加するが，$m=2$ モードの周波数は減少する。減衰割合の温度依存性は両モードとも温度に対し増加する傾向を示す。Maragòら[7)8)]は ^{87}Rb 原子の凝縮体のscissorモード振動を観測した。scissorモード振動はトラップポテンシャルの対称軸のまわりでのボーズ凝縮体の振動であり，非等方トラップポテンシャルの突然の回転により励起される。scissorモード振動の周波数と減衰割合も温度によって変化し，周波数は温度上昇とともに減少するのに対し，減衰割合は集団励起の場合と同様に増加する。

最近，Chevyら[9)]はRb原子の引き伸ばされた凝縮体の横振動モードを観測した。低温（40nk）で短時間（0.7sまで）の場合，観測された振動モードはGross-Pitaevskii方程式に基づく理論とよい一致を示した。しかし，モード周波数と減衰割

* 工学部　電気電子情報工学科　教授
2002年12月2日受付

合の温度依存性(200nk まで)は逆に予想外の結果を示した。第一は観測された減衰割合が他のモードに対する値の10分の１程度であること，第二はモード周波数がほとんど温度に依存しないこと，第三は強く励起された振動モードの長時間ふるまいが非線形特有の現象を示すことである。

低エネルギー集団励起のモード周波数と減衰割合の温度依存性の問題は実験的にも理論的に大変興味深い課題である。本論文では有限温度で熱的励起した準粒子集団の動的効果を考慮して，ボーズ凝縮体の低エネルギー集団励起のモード周波数と減衰割合の理論を展開する。第２章では絶対零度での低エネルギー集団励起のモード周波数を求める。第３章では凝縮体の広がり幅に対するスケールパラメータを導入する方法を使い，絶対零度でのモード周波数を求める。第４章では，第３章のスケールパラメータの方法を有限温度に拡張し，低エネルギー集団励起のモード周波数と減衰割合の温度依存性を求める。第５章では本論文の結果をまとめ，今後の課題を示す。

第２章　絶対零度の集団励起の理論[10)]

トラップポテンシャル中の Bose 気体の系を考える。Bose 粒子が二体相互作用しているとし，この Bose 系のハミルトニアンを次式で表わす。

$$\hat{H}=-\int dx\hat{\varphi}^{+}(x)\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\hat{\varphi}(x)+\int dxU(x)\hat{\varphi}^{+}(x)\hat{\varphi}(x)+\frac{1}{2}\int dx\int dyV(x-y)\hat{\varphi}^{+}(x)\hat{\varphi}^{+}(y)\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(x). \tag{2.1}$$

ここで $U(x)$ はトラップポテンシャルであり，$V(x-y)$ は原子間の二体相互作用ポテンシャルである。$\hat{\varphi}^{+}(x)$，$\hat{\varphi}(x)$ は次の交換関係を満足する Bose 場の演算子である。

$$[\hat{\varphi}(x),\ \hat{\varphi}^{+}(y)]=\delta(x-y),$$
$$[\hat{\varphi}(x),\ \hat{\varphi}(y)]=[\hat{\varphi}^{+}(x),\ \hat{\varphi}^{+}(y)]=0. \tag{2.2}$$

相互作用ポテンシャル $V(x-y)$ は斥力とし，次の形の接触型相互作用とする。

$$V(x-y)=g\delta(x-y).\ (g>0) \tag{2.3}$$

３次元の場合は $g=4\pi\hbar^2a/m$（a は散乱長）である。演算子 $\hat{\varphi}(x)$ の運動方程式はハイゼンベルグ表現で表わすと，

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\varphi}(x)}{\partial t}=[\hat{H},\ \hat{\varphi}(x)] \tag{2.4}$$

であり，(2.1)（2.3）を使うと，

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\varphi}(x)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\hat{\varphi}(x)+U(x)\hat{\varphi}(x)+g\hat{\varphi}^{+}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x) \tag{2.5}$$

となる。凝縮体の波動関数 $\Psi(xt)$ をハイゼンベルグ表示を使って次の行列要素で定義する。

$$\Psi(xt)=\langle N-1|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\varphi}(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|N\rangle. \tag{2.6}$$

ここで $|N\rangle$ と $|N-1\rangle$ はそれぞれ N 粒子と $N-1$ 粒子の基底状態である。大きい N に対して，基底状態のエネルギー差 $E(N)-E(N-1)$ は系の化学ポテンシャル μ に等しいので，凝縮体の形状が時間的に変化しない定常状態の場合，$\Psi(xt)$ の時間依存性は次となる。

$$\Psi(xt)=\Psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t}. \tag{2.7}$$

この定義を使って，演算子 $\hat{\varphi}(x)$ の式（2.5）の期待値をとると，

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(xt)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(xt)+U(x)\Psi(xt)+g\langle\hat{\varphi}^{+}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)\rangle \tag{2.8}$$

となり，これが凝縮体の波動関数 $\Psi(xt)$ の時間変化の方程式である。ここで右辺第３項を次のように近似すると，

$$\langle\hat{\varphi}^{+}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)\rangle=\Psi^{*}(xt)\Psi(xt)\Psi(xt), \tag{2.9}$$

(2.8) は次式となる。

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(xt)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(xt)+U(x)\Psi(xt)+g|\Psi(xt)|^2\Psi(xt). \tag{2.10}$$

この凝縮体 $\Psi(xt)$ の方程式は Gross-Pitaevskii 方程式（以下 GP 方程式という）と呼ばれている。トラップポテンシャルとして，次の調和振動子型ポテンシャルを考える。

$$U(x)=\frac{1}{2}m\omega_0{}^2(\lambda_1{}^2x_1{}^2+\lambda_2{}^2x_2{}^2+\lambda_3{}^2x_3{}^2) \tag{2.11}$$

ここで λ_1，λ_2，λ_3 はトラップの非等方性を示す定数であり，等方型の場合は $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ である。

$\Psi(xt)$ に対する規格化条件は

$$\int dx|\Psi(xt)|^2=N_0 \tag{2.12}$$

であり，N_0 は全凝縮原子数である。

次にトラップされた凝縮体の形状について考える。粒子数が大きく，原子間相互作用が斥力の場合，運動エネルギーは相互作用エネルギーに比べて小さくなる。原子数が大きい場合，凝縮体の波動関数は運動エネルギー項を無視し，GP 方程式を解くことによって得られ，この近似を Thomas-Fermi 近似という。(2.7) と (2.10) から

$$[U(x)+g|\Psi_0(x)|^2]\Psi_0(x)=\mu\Psi_0(x) \tag{2.13}$$

であり，凝縮体密度 $n_0(x)$ は，

$$n_0(x)=|\Psi_0(x)|^2=[\mu-U(x)]/g \tag{2.14}$$

となる。(2.14) は第 3 項が正である領域に限られており，その領域の外では $\Psi_0(x)=0$ である。

凝縮体の形状が時間的に変化する場合のふるまいを調べるために，凝縮体の密度場 $n_0(xt)$ と位相場 $S(xt)$ を導入し，凝縮体の流体力学的方程式を導く。凝縮体の波動関数 $\Psi(xt)$を

$$\Psi(xt)=[n_0(xt)]^{\frac{1}{2}}\exp[\mathrm{i}S(xt)]e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t} \tag{2.15}$$

と書く。凝縮体の密度 $n_0(xt)$，速度ポテンシャル $\Phi(xt)$，速度 $v(xt)$ は次式で与えられる。

$$n_0(xt)=|\Psi(xt)|^2, \tag{2.16}$$

$$\Phi(xt)=\frac{\hbar}{m}S(xt), \tag{2.17}$$

$$v(xt)=\nabla\Phi(xt). \tag{2.18}$$

(2.18) から速度は速度ポテンシャルの勾配で与えられるので，凝縮体の運動はポテンシャル流であり，非回転である。次に凝縮体の波動関数を定常値と偏差の形に表わす。

$$\Psi(xt)=(\Psi_0(x)+\Delta(xt))e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t}, \tag{2.19}$$

$$\Psi^*(xt)=(\Psi_0^*(x)+\Delta^*(xt))e^{\frac{i}{\hbar}\mu t}. \tag{2.20}$$

定常状態での波動関数 $\Psi_0(x)$を

$$\Psi_0(x)=[n_0(x)]^{\frac{1}{2}}\exp[iS(x)] \tag{2.21}$$

とおくと，密度，速度ポテンシャル，速度はそれぞれ次となる。

$$n_0(x)=|\Psi_0(x)|^2, \tag{2.22}$$

$$\Phi(x)=\frac{\hbar}{m}S(x), \tag{2.23}$$

$$v_0(x)=\nabla\Phi(x). \tag{2.24}$$

ここで $\Delta(xt)=\tilde{\Delta}(xt)\exp(iS(x))$ とおき，GP 方程式 (2.10) を使って，$\Delta(xt)$，$\Delta^*(xt)$ の零次と 1 次の方程式を求めると，

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(x)-\mu\right)\Psi_0(x)+g|\Psi_0(x)|^2\Psi_0(x)=0, \tag{2.25}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Delta}(xt)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla+i\nabla S(x))^2+U(x)-\mu\right)\tilde{\Delta}(xt)+gn_0(x)\tilde{\Delta}^*(xt)+2gn_0(x)\tilde{\Delta}(xt) \tag{2.26}$$

となる。凝縮体の密度と速度ポテンシャルについても定常値と偏差という形に表わすと，

$$n_0(xt)=n_0(x)+\delta n(xt), \tag{2.27}$$

$$\Phi(xt)=\Phi(x)+\delta\Phi(xt) \tag{2.28}$$

であり，$\delta \mathrm{n}(xt)$ と $\delta\Phi(xt)$ は $\Delta(xt)$, $\Delta^*(xt)$ を使って次のように表わされる。ただし，ここでも $\Delta(xt)$，$\Delta^*(xt)$ の線形項までとする。

$$\delta n(xt)=\Psi_0^*(x)\Delta(xt)+\Psi_0(x)\Delta^*(xt)=[n_0(x)]^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Delta}(xt)+\tilde{\Delta}^*(xt)), \tag{2.29}$$

$$\delta\Phi(xt)=-i\frac{\hbar}{2mn_0(x)}[\Psi_0^*(x)\Delta(xt)-\Psi_0(x)\Delta^*(xt)]=-i\frac{\hbar}{2m[n_0(x)]^{\frac{1}{2}}}(\tilde{\Delta}(xt)-\tilde{\Delta}^*(xt)). \tag{2.30}$$

粒子流束密度 $j(xt)$は凝縮体の波動関数を使って

$$j(xt)=-i\frac{\hbar}{2m}(\Psi^*(xt)\nabla\Psi(xt)-\Psi(xt)\nabla\Psi^*(xt)) \tag{2.31}$$

で与えられるので，定常値と偏差の形に書くと，

$$j(xt)=j_0(x)+\delta j(xt), \tag{2.32}$$

$$j_0(x)=-i\frac{\hbar}{2m}(\Psi_0^*(x)\nabla\Psi_0(x)-\Psi_0(x)\nabla\Psi_0^*(x))=n_0(x)v_0(x), \tag{2.33}$$

$$\delta j(xt)=-i\frac{\hbar}{2m}[\Psi_0^*(x)\Delta(xt)+\Delta^*(xt)\Psi_0(x)-(\nabla\Psi_0^*(x))\Delta(xt)-(\nabla\Delta^*(xt))\Psi_0(x)]=v_0(x)\delta n(xt)+n_0(x)\nabla\delta\Phi(xt) \tag{2.34}$$

となる。(2.26) を使うと，$\delta n(xt)$ の時間変化の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n(xt) = -\nabla(v_0(x)\delta n(xt) + n_0(x)\nabla\delta\Phi(xt)) \tag{2.35}$$

となり，$\delta j(xt)$ を使って表わすと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n(xt) + \nabla\delta j(xt) = 0 \tag{2.36}$$

となる。これは粒子数に対する保存則である。同様に $\delta\Phi(xt)$ の時間変化の式を求めると，

$$\begin{aligned} n_0(x)\frac{\partial}{\partial t}\delta\Phi(xt) &= -\frac{\hbar}{m}\nabla\{(\nabla S(x))n_0(x)\delta\Phi(xt)\} \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{4m^2}\left\{\nabla^2\delta n(xt) - \nabla(\delta n(xt)\frac{1}{n_0(x)}\nabla n_0(x))\right\} \\ &\quad - \frac{g}{m}n_0(x)\delta n(xt) \end{aligned} \tag{2.37}$$

となる。ここで定常状態では流れがない $(v_0(x)=0)$ とし，Thomas-Fermi 近似と同じ近似を考え，(2.37)の右辺の第2項つまり運動エネルギー項を無視すると，(2.35)(2.37) はそれぞれ次となる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n(xt) = -\nabla(n_0(x)\nabla\delta\Phi(xt)), \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\Phi(xt) = -\frac{g}{m}\delta n(xt). \tag{2.39}$$

両式より $\delta n(xt)$ に対する方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta n(xt) = \frac{g}{m}\nabla(n_0(x)\nabla\delta n(xt)) \tag{2.40}$$

となる。$\delta n(xt)$ の時間依存性が $\exp(-i\omega t)$ であるとし，(2.40) を次とする。

$$-\omega^2\delta n(x) = \frac{g}{m}\nabla(n_0(x)\nabla\delta n(x)). \tag{2.41}$$

定常状態での凝縮体の密度 $n_0(x)$ は(2.14)で与えられるので，(2.41) は最終的に次式となる。

$$\begin{aligned} \omega^2\delta n(x) = \frac{1}{m}\{&\nabla U(x)\nabla\delta n(x) \\ &-(\mu - U(x))\nabla^2\delta n(x)\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

この式を解くことにより，凝縮体の密度ゆらぎのモード周波数を求めることができる。

最初にトラップポテンシャルが等方的な場合 $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1)$ を考える。ポテンシャルは

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2}m\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 \end{aligned} \tag{2.43}$$

となり，凝縮体の半径 R と化学ポテンシャル μ との関係は (2.14) より

$$\mu = \frac{1}{2}m\omega_0^2 R^2 \tag{2.44}$$

となる。球面座標 $(r,\ \theta,\ \phi)$ を使って (2.42) を書くと

$$\begin{aligned} \omega^2\delta n = \omega_0^2 r\frac{\partial}{\partial r}\delta n - \frac{1}{2}\omega_0^2(R^2 - r^2) \\ \times\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}\delta n) - \frac{\boldsymbol{\ell}^2}{\hbar^2 r^2}\delta n\right\} \end{aligned} \tag{2.45}$$

となる。ここで $\boldsymbol{\ell}^2$ は角運動量演算子 ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z を使って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\ell}^2 &= \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 \\ &= -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \end{aligned} \tag{2.46}$$

で与えられる。r と θ, ϕ に変数分離して

$$\delta n = D(r)Y(\theta,\ \phi) \tag{2.47}$$

とおくと，$D(r)$ と $Y(\theta,\ \phi)$ に対する式は次となる。

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dD}{dr}\right) + \frac{2r^2}{\omega_0^2(R^2-r^2)}\left(\omega^2 D - \omega_0^2 r\frac{dD}{dr}\right) = \lambda D, \tag{2.48}$$

$$\boldsymbol{\ell}^2 Y = \hbar^2\lambda Y.\ (\lambda\text{は定数}) \tag{2.49}$$

(2.49) の解はよく知られているように

$$Y_{\ell m}(\theta,\ \phi) = N_\ell^m P_\ell^m(cos\theta)e^{im\phi} \quad (|m|\le\ell,\ \ell=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{2.50}$$

であり，固有値方程式 (2.49) の固有関数で完全規格直交系を形成する。固有値は $\lambda=\ell(\ell+1)$ で，$m=\ell,\ \ell-1,\ \cdots,\ -\ell$ なる $2\ell+1$ 個の m の値に対し，$2\ell+1$ 重に縮退している。ここで $P_\ell^m(cos\theta)$ はルジャンドルの多項式であり，係数 N_ℓ^m は次式で与えられる。

$$N_\ell^m = \left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.51}$$

ℓ は全角運動量の大きさに対する量子数，m はトラップ対称軸に写影した角運動量量子数である。簡単な解として $D(\mathrm{r})\propto r^\ell$ の場合を考えると，(2.48) よりモード周波数は $\omega^2=\ell\omega_0^2$ となる。

次にトラップポテンシャルが軸対称な場合（λ_1

$=\lambda_2=1$，$\lambda_3=\lambda$）を考える。ポテンシャルは

$$U(x)=\frac{1}{2}m\omega_0{}^2(x_1{}^2+x_2{}^2+\lambda^2 x_3{}^2)$$
$$=\frac{1}{2}m\omega_0{}^2(\rho^2+\lambda^2 z^2) \tag{2.52}$$

となる。凝縮体の密度は $z=0$ 面での凝縮体の半径 $R=(2\mu/m\omega_0{}^2)^{\frac{1}{2}}$ を使うと，

$$n_0(x)=\frac{\mu}{g}\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}-\frac{\lambda^2 z^2}{R^2}\right) \tag{2.53}$$

となる。円柱座標（ρ，θ，z）を使って（2.42）を書くと，

$$\omega^2\delta n=\omega_0{}^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\delta n+\lambda^2\omega_0{}^2 z\frac{\partial}{\partial z}\delta n$$
$$-\frac{\omega_0^2}{2}\{R^2-(\rho^2+\lambda^2 z^2)\}\nabla^2\delta n \tag{2.54}$$

となる。ここで

$$\nabla^2\delta n=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\delta n\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\delta n\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial}{\partial z}\delta n\right)\right\} \tag{2.55}$$

である。今度は ρ，z と ϕ の変数分離を行うと，

$$\delta n=D(\rho,\ z)\Theta(\phi) \tag{2.56}$$

であり，$D(\rho,\ z)$ と $\Theta(\phi)$ に対する式は次となる。

$$\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}D=\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}D+\lambda^2 z\frac{\partial}{\partial z}D\right)$$
$$-\frac{1}{2\rho}(R^2-\rho^2-\lambda^2 z^2)\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial D}{\partial\rho}\right)\right.$$
$$\left.+\rho\frac{\partial^2 D}{\partial z^2}-\frac{\nu}{\rho}D\right\}, \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi=-\nu\Phi.\ (\nu\text{ は定数}) \tag{2.58}$$

ここで $\nu=m^2$ とおくと

$$\Theta(\phi)=e^{im\phi}(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{2.59}$$

である。（2.57）の解として

$$\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}D=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}D+\lambda^2 z\frac{\partial}{\partial z}D, \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial D}{\partial\rho}\right)+\rho\frac{\partial^2 D}{\partial z^2}=\frac{m^2}{\rho}D \tag{2.61}$$

の場合を考える。$D\propto\rho^s z^t$ とおき，両式に代入すると，（2.60）より

$$s+\lambda^2 t=\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}, \tag{2.62}$$

（2.61）より

$$t(t-1)=0\quad\text{かつ}\quad s^2=m^2 \tag{2.63}$$

となる。ここで $t=0$ のときは

$$\delta n\propto\rho^{\ell}e^{\pm i\ell\phi},\ \ \omega^2=\ell\omega_0{}^2 \tag{2.64}$$

となり，$t=1$ のときは

$$\delta n\propto\rho^{\ell-1}ze^{\pm i(\ell-1)\phi},\ \ \omega^2=(\ell-1+\lambda^2)\omega_0{}^2 \tag{2.65}$$

となる。球面座標を使って表現すると，(2.64)の場合は

$$\delta n\propto r^{\ell}Y_{\ell,\pm\ell}(\theta,\ \phi) \tag{2.66}$$

であり，（2.65）の場合は

$$\delta n\propto r^{\ell}Y_{\ell,\pm(\ell-1)}(\theta,\ \phi) \tag{2.67}$$

となる。

次に低エネルギー集団励起である $\ell=2$ の場合を考える。$\ell=2$，$m=\pm2$ に対しては (2.64) より

$$\delta n\propto\rho^2\exp(\pm i2\phi)=r^2 Y_{2,\pm2}(\theta,\ \phi) \tag{2.68}$$

であり，モード周波数は $\omega^2=2\omega_0{}^2$ である。$\ell=2$，$m=\pm1$ に対しては（2.65）より

$$\delta n\propto\rho z\exp(\pm i\phi)=r^2 Y_{2,\pm1}(\theta,\ \phi) \tag{2.69}$$

であり，モード周波数は $\omega^2=(1+\lambda^2)\omega_0{}^2$ である。$\ell=2$，$m=0$ に対しては（2.62）（2.63）を満足しないので，(2.57)にもどって考えなければならない。$\ell=0$，$m=0$ のモードとの混合を考慮して

$$\delta n=a+b\rho^2+cz^2\ (a,\ b,\ c\text{ は定数}) \tag{2.70}$$

とおき，(2.54)の両辺に代入して定数項，ρ^2 の係数，z^2 の係数を等しくおくと，

$$\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}a+2R^2 b+R^2 c=0, \tag{2.71}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}-4\right)b-c=0, \tag{2.72}$$

$$-2\lambda^2 b+\left(\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}-3\lambda^2\right)c=0, \tag{2.73}$$

となる。自明な解が存在する条件

$$\omega^2\{(\omega^2-4\omega_0{}^2)(\omega^2-3\lambda^2\omega_0{}^2)-2\lambda^2\omega_0{}^4\}=0 \tag{2.74}$$

を使うと，δn が一定である $\omega^2=0$ の解と

$$\omega^2=\frac{4+3\lambda^2\pm\sqrt{16-16\lambda^2+9\lambda^4}}{2}\omega_0{}^2 \tag{2.75}$$

の解が存在することが分かる。次章ではこのモード周波数を別の方法で導き，凝縮体の集団励起のふるまいを明らかにする。

第3章　スケールパラメータによる方法[11)12)13)]

本章では低エネルギー集団励起である凝縮体の変形振動をスケールパラメータ $b_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$ を導入し，座標 x_i を新しい座標 $X_i(t)=x_i/b_i(t)$ に変換して考える。凝縮体の波動関数 $\Psi(xt)$ を

$$\Psi(xt)=\nu^{-\frac{1}{2}}(t)[\tilde{n}_0(X(t))]^{\frac{1}{2}}\exp[iS(xt)] \quad (3.1)$$

と表わし，ここで

$$\nu^{-1}(t)[\tilde{n}_0(X(t))]=n_0(xt), \quad (3.2)$$

$$\nu(t)=\prod_i b_i(t) \quad (3.3)$$

である。スケールパラメータを定常値 b_{0i} と偏差 $\delta b_i(t)$ の和の形

$$b_i(t)=b_{0i}+\delta b_i(t) \quad (3.4)$$

とし，位相 $S(xt)$ については

$$S(xt)=S(x)+\delta S(xt) \quad (3.5)$$

とおく。偏差の1次の項で波動関数を表わすと次の形になる。

$$\Psi(xt)=\Psi_0(x)+\Delta(xt), \quad (3.6)$$

$$\Psi_0(x)=n_0(x)^{\frac{1}{2}}\exp[iS(x)]$$
$$=\left(\frac{1}{b_{01}b_{02}b_{03}}\right)^{\frac{1}{2}}\tilde{n}_0(x)^{\frac{1}{2}}\exp[iS(x)],$$

$$\Delta(xt)=\Bigg[-\frac{1}{2}n_0(x)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta b_1}{b_{01}}+\frac{\delta b_2}{b_{02}}+\frac{\delta b_3}{b_{03}}\right)$$
$$-x_1\frac{\partial n_0(x)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\frac{\delta b_1}{b_{01}}-x_2\frac{\partial n_0(x)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2}\frac{\delta b_2}{b_{02}}$$
$$-x_3\frac{\partial n_0(x)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_3}\frac{\delta b_3}{b_{03}}$$
$$+n_0(x)^{\frac{1}{2}}(i\delta S(xt))\Bigg]e^{iS(x)}$$
$$=\left(\frac{1}{b_{01}b_{02}b_{03}}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg[-\frac{1}{2}\tilde{n}_0(x)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta b_1}{b_{01}}+\frac{\delta b_2}{b_{02}}+\frac{\delta b_3}{b_{03}}\right)$$
$$-X_1\frac{\partial \tilde{n}_0(X)^{\frac{1}{2}}}{\partial X_1}\frac{\delta b_1}{b_{01}}-X_2\frac{\partial \tilde{n}_0(X)^{\frac{1}{2}}}{\partial X_2}\frac{\delta b_2}{b_{02}}$$
$$-X_3\frac{\partial \tilde{n}_0(X)^{\frac{1}{2}}}{\partial X_3}\frac{\delta b_3}{b_{03}}$$
$$+\tilde{n}_0(X)^{\frac{1}{2}}(i\delta S(xt))\Bigg]e^{iS(x)}. \quad (3.7)$$

ここで $X_1=x_1/b_{01}$，$X_2=x_2/b_{02}$，$X_3=x_3/b_{03}$ である。(3.7) を使うと，密度の定常値からの偏差は (2.29) より

$$\delta n(xt)=-\Bigg[\left(n_0(x)+x_1\frac{\partial n_0(x)}{\partial x_1}\right)\frac{\delta b_1}{b_{01}}$$
$$+\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial n_0(x)}{\partial x_2}\right)\frac{\delta b_2}{b_{02}}$$
$$+\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial n_0(x)}{\partial x_3}\right)\frac{\delta b_3}{b_{03}}\Bigg]$$
$$=-\frac{1}{b_{01}b_{02}b_{03}}\Bigg[\left\{\tilde{n}_0(X)+X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0(X)\right\}\frac{\delta b_1}{b_{01}}$$
$$+\left\{\tilde{n}_0(X)+X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0(X)\right\}\frac{\delta b_2}{b_{02}}$$
$$+\left\{\tilde{n}_0(X)+X_3\frac{\partial}{\partial X_3}\tilde{n}_0(X)\right\}\frac{\delta b_3}{b_{03}}\Bigg] \quad (3.8)$$

となる。速度ポテンシャルの偏差は (2.30) より

$$\delta\Phi(xt)=\frac{\hbar}{m}\delta S(xt) \quad (3.9)$$

となる。$\delta n(xt)$ と $\delta\Phi(xt)$ の間には (2.38) の関係があることを考慮すると，速度ポテンシャルの偏差は

$$\delta\Phi(xt)=\frac{1}{2}\left(x_1^2\frac{1}{b_{01}}\frac{d}{dt}\delta b_1+x_2^2\frac{1}{b_{02}}\frac{d}{dt}\delta b_2\right.$$
$$\left.+x_3^2\frac{1}{b_{03}}\frac{d}{dt}\delta b_3\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(b_{01}X_1^2\frac{d}{dt}\delta b_1+b_{02}X_2^2\frac{d}{dt}\delta b_2\right.$$
$$\left.+b_{03}X_3^2\frac{d}{dt}\delta b_3\right) \quad (3.10)$$

と表現される。

次に凝縮体の広がりを示す量である $\langle x_i^2\rangle$ $(i=1, 2, 3)$ を考える。ただし，$i=1$ のみを記す。

$$\langle x_1^2\rangle=\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2 n_0(xt). \quad (3.11)$$

この量をスケールパラメータを使って表わすと，

$$\langle x_1^2\rangle=b_1^2(t)\frac{1}{N_0}\int dX X_1^2\tilde{n}_0(X) \quad (3.12)$$

となる。(3.11) の時間微分をとり，(2.38) (2.39) を使うと，

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1^2\rangle=\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{g}{m}\delta n(xt)\right) \quad (3.13)$$

となる。ここで境界条件 $n_0(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$ を使った。(3.8) より $\delta b_i(i=1, 2, 3)$ で表わすと，

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1{}^2\rangle$$
$$=\frac{1}{N_0}\int dX 2X_1\tilde{n}_0(X)\frac{\partial}{\partial X_1}\Big[\frac{g}{m}\frac{1}{b_{01}b_{02}b_{03}}$$
$$\times\Big\{\Big(\tilde{n}_0(X)+X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0(X)\Big)\frac{\delta b_1}{b_{01}}$$
$$+\Big(\tilde{n}_0(X)+X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0(X)\Big)\frac{\delta b_2}{b_{02}}$$
$$+\Big(\tilde{n}_0(X)+X_3\frac{\partial}{\partial X_3}\tilde{n}_0(X)\Big)\frac{\delta b_3}{b_{03}}\Big\}\Big] \qquad (3.14)$$

となる。凝縮体密度 $\tilde{n}_0(X)$ は（2.14）より

$$\tilde{n}_0(X)=\frac{b_{01}b_{02}b_{03}}{g}\Big[\mu-\frac{1}{2}m\omega_0{}^2(b_{01}{}^2\lambda_1{}^2X_1{}^2$$
$$+b_{02}{}^2\lambda_2{}^2X_2{}^2+b_{03}{}^2\lambda_3{}^2X_3{}^2)\Big] \qquad (3.15)$$

であるので，（3.15）へ代入すると，

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1{}^2\rangle$$
$$=-\frac{g}{m}\frac{1}{b_{01}b_{02}b_{03}}\Big[\frac{1}{N_0}\int dX\tilde{n}_0{}^2(X)$$
$$\times\Big(2\frac{\delta b_1}{b_{01}}+\frac{\delta b_2}{b_{02}}+\frac{\delta b_3}{b_{03}}\Big)\Big]$$
$$-\frac{1}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0(X)\times(2\lambda_1{}^2\omega_0{}^2b_{01}{}^2)\frac{\delta b_1}{b_{01}} \qquad (3.16)$$

となる。一方，（3.12）の時間微分を行い，

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1{}^2\rangle=\Big\{2\Big(\frac{db_1}{dt}\Big)^2+2b_1\frac{d^2b_1}{dt^2}\Big\}\frac{1}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0(X) \qquad (3.17)$$

となり，（3.4）より δb_1 の1次の項までを考える線形近似を行うと，

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1{}^2\rangle=\Big\{2b_{01}\frac{d^2}{dt^2}\delta b_1\Big\}\frac{1}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0(X) \qquad (3.18)$$

となる。（3.16）と（3.18）より δb_1 に対する方程式が求まる。

$$2b_{01}\Big(\frac{d^2}{dt^2}\delta b_1\Big)A_1$$
$$=\Big(-\frac{2g}{m}\frac{B}{b_{01}b_{02}b_{03}}-2\lambda_1{}^2\omega_0{}^2b_{01}{}^2A_1\Big)\frac{\delta b_1}{b_{01}}$$
$$-\frac{g}{m}\frac{B}{b_{01}b_{02}b_{03}}\frac{\delta b_2}{b_{02}}-\frac{g}{m}\frac{B}{b_{01}b_{02}b_{03}}\frac{\delta b_3}{b_{03}}. \qquad (3.19)$$

ここで

$$A_i=\frac{1}{N_0}\int dXX_i{}^2\tilde{n}_0(X)\ (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (3.20)$$

$$B=\frac{1}{N_0}\int dX\tilde{n}_0{}^2(X) \qquad (3.21)$$

である。$\delta b_i(t)$ の時間依存性を $\exp(-i\omega t)$ として，$\delta b_i(0)(i=1,\ 2,\ 3)$ に対する方程式を求める。

$$-\omega^2\delta b_1(0)$$
$$=\delta b_1(0)\Big(-\lambda_1{}^2\omega_0{}^2-\frac{2}{b_{01}{}^3b_{02}b_{03}}Q_1\Big)$$
$$+\delta b_2(0)\Big(-\frac{1}{b_{01}{}^2b_{02}{}^2b_{03}}Q_1\Big)$$
$$+\delta b_3(0)\Big(-\frac{1}{b_{01}{}^2b_{02}b_{03}{}^2}Q_1\Big), \qquad (3.22)$$

$$-\omega^2\delta b_2(0)$$
$$=\delta b_1(0)\Big(-\frac{1}{b_{01}{}^2b_{02}{}^2b_{03}}Q_2\Big)$$
$$+\delta b_2(0)\Big(-\lambda_2{}^2\omega_0{}^2-\frac{2}{b_{01}b_{02}{}^3b_{03}}Q_2\Big)$$
$$+\delta b_3(0)\Big(-\frac{1}{b_{01}b_{02}{}^2b_{03}{}^2}Q_2\Big), \qquad (3.23)$$

$$-\omega^2\delta b_3(0)$$
$$=\delta b_1(0)\Big(-\frac{1}{b_{01}{}^2b_{02}b_{03}{}^2}Q_3\Big)$$
$$+\delta b_2(0)\Big(-\frac{1}{b_{01}b_{02}{}^2b_{03}{}^2}Q_3\Big)$$
$$+\delta b_3(0)\Big(-\lambda_3{}^2\omega_0{}^2-\frac{2}{b_{01}b_{02}b_{03}{}^3}Q_3\Big). \qquad (3.24)$$

ここで

$$Q_i=\frac{g}{2m}\frac{B}{A_i}\ (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (3.25)$$

である。第2章で論じたトラップポテンシャルが軸対称の場合（$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=\lambda$）に今までの結果を適用し，$Q_1=Q_2=Q$，$b_{01}=b_{02}=b_0$ とおくと，（3.22）（3.23）（3.24）は行列の形に整理することができる。

$$\begin{bmatrix} -\omega^2+\omega_0{}^2+\frac{2Q}{b_0{}^4b_{03}} & \frac{Q}{b_0{}^4b_{03}} & \frac{Q}{b_0{}^3b_{03}{}^2} \\ \frac{Q}{b_0{}^4b_{03}} & -\omega^2+\omega_0{}^2+\frac{2Q}{b_0{}^4b_{03}} & \frac{Q}{b_0{}^3b_{03}{}^2} \\ \frac{Q_3}{b_0{}^3b_{03}{}^2} & \frac{Q_3}{b_0{}^3b_{03}} & -\omega^2+\lambda^2\omega_0{}^2+\frac{2Q_3}{b_0{}^2b_{03}{}^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta b_1(0)\\ \delta b_2(0)\\ \delta b_3(0)\end{bmatrix}=0. \qquad (3.26)$$

前の論文[13]で示したように，定常値の間には次の関係

$$\omega_0{}^2 b_0 = \frac{Q}{b_0{}^3 b_{03}}, \tag{3.27}$$

$$\lambda^2 \omega_0{}^2 b_{03} = \frac{Q_3}{b_0{}^2 b_{03}{}^2} \tag{3.28}$$

があるので，(3.26)は簡単に次のように書くことができる。

$$(-\omega^2 \boldsymbol{1} + \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{3.29}$$

ここで $\boldsymbol{1}$ は単位行列，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ はそれぞれ次である。

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta b_1(0)}{b_0} \\ \dfrac{\delta b_2(0)}{b_0} \\ \dfrac{\delta b_3(0)}{b_{03}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3\omega_0{}^2 & \omega_0{}^2 & \omega_0{}^2 \\ \omega_0{}^2 & 3\omega_0{}^2 & \omega_0{}^2 \\ \lambda^2\omega_0{}^2 & \lambda^2\omega_0{}^2 & 3\lambda^2\omega_0{}^2 \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

前の論文で求めたように，固有モード周波数 ω は次の行列式を解くことによって求めることができる。

$$|-\omega^2 \boldsymbol{1} + \boldsymbol{A}| = 0. \tag{3.31}$$

この方程式を解くと固有モード周波数は次となる。

$$\omega_\pm = \sqrt{q_\pm}\,\omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0, \tag{3.32}$$

ただし，

$$q_\pm = \frac{4+3\lambda^2 \pm \sqrt{16-16\lambda^2+9\lambda^4}}{2} \tag{3.33}$$

である。この結果は第2章での (2.75) と一致する。行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \omega_-{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_+{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2{}^2 \end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ q_- - 4 & q_+ - 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

である。固有モード周波数に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_- \\ \xi_+ \\ \xi_2 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

であり，逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を使って

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{3.37}$$

で与えられる。ここで逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ は

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_+-4}{2(q_+-q_-)} & \dfrac{q_+-4}{2(q_+-q_-)} & -\dfrac{2}{2(q_+-q_-)} \\ -\dfrac{q_--4}{2(q_+-q_-)} & -\dfrac{q_--4}{2(q_+-q_-)} & -\dfrac{2}{2(q_+-q_-)} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

である。これより ξ_-，ξ_+，ξ_2 は $\delta b_1/b_0$，$\delta b_2/b_0$，$\delta b_3/b_{03}$ を使い，次のように表現される。

$$\begin{aligned} \xi_- &= \frac{q_+-4}{2(q_+-q_-)}\frac{\delta b_1}{b_0} + \frac{q_+-4}{2(q_+-q_-)}\frac{\delta b_2}{b_0} \\ &\quad - \frac{2}{2(q_+-q_-)}\frac{\delta b_3}{b_{03}}, \\ \xi_+ &= -\frac{q_--4}{2(q_+-q_-)}\frac{\delta b_1}{b_0} - \frac{q_--4}{2(q_+-q_-)}\frac{\delta b_2}{b_0} \\ &\quad - \frac{2}{2(q_+-q_-)}\frac{\delta b_3}{b_{03}}, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}\frac{\delta b_1}{b_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta b_2}{b_0}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

この結果から各固有モード周波数に対する変形振動のふるまいを論じることができる。固有モード周波数 ω_- のモード振動の場合は x_1 方向と x_2 方向は同位相で振動するのに対して，x_3 方向は反位相で振動することが分かる。これは第2章で述べた $m=0$ の四重極振動に対応する。固有モード周波数 ω_+ のモード振動は x_1方向と x_2 方向は同位相で振動し，同時に x_3 方向も同位相で振動する。これは $m=0$ の振動に対応し，凝縮体の膨張収縮振動を表わしている。固有モード周波数 ω_2 のモード振動は x_1方向と x_2方向は反位相で振動するが，x_3 方向の振動はおこっていない。これは，第2章で示した $\ell=2$，$|m|=2$ の振動に対応する。以上のように第2章で求めた低エネルギー集団励起のモード周波数がスケールパラメータの方法で導けること，そしてスケールパラメータの方法が各モードの振動のふるまいをわかりやすく示すことが分かる。

第4章　有限温度の集団励起の理論

本章では第3章で述べた絶対零度での低エネルギー集団励起の結果を有限温度に拡張する。

最初に，第 2 章で求めた凝縮体の波動関数の定常値 $\Psi_0(x)$ と偏差 $\Delta(xt)$ に対する方程式を考える。本章では以前の論文[14)15)]で述べた統計力学的方法を使う。Bose 気体の量子統計理論を考えるために，密度行列 $\rho(t)$ を導入する。密度行列はハミルトニアン (2.1) を使い，次のリュービル方程式に従う。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)=[H,\ \rho(t)]. \tag{4.1}$$

凝縮体の存在は次の変位演算子を使って導入する。

$$D[\Psi(xt)]=\exp\int dx[\Psi(xt)\hat{\phi}^{+}(x)-\Psi^{*}(xt)\hat{\phi}(x)]. \tag{4.2}$$

この変位演算子を使うと，

$$D[\Psi(xt)]^{+}\hat{\phi}(x)D[\Psi(xt)]=\Psi(xt)+\hat{\phi}(x), \tag{4.3}$$

$$D[\Psi(xt)]^{+}\hat{\phi}^{+}(x)D[\Psi(xt)]=\Psi^{*}(xt)+\hat{\phi}^{+}(x) \tag{4.4}$$

となる。この変換により Bose 場の演算子 $\hat{\phi}(x)$ は凝縮体 $\Psi(xt)$ からの偏差を示す場の演算子に変わる。密度行列に対して同じ変換を行うと，

$$\rho'(t)=D[\Psi(xt)]^{+}\rho(t)D[\Psi(xt)] \tag{4.5}$$

となり，リュービル方程式 (4.1) は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho'(t)=[H(t)+H'(t),\ \rho'(t)] \tag{4.6}$$

となる。ここで $H(t)$，$H'(t)$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}H(t)&=D[\Psi(xt)]^{+}HD[\Psi(xt)]\\&=H[\Psi(xt)+\hat{\phi}(x),\ \Psi^{*}(xt)+\hat{\phi}^{+}(x)],\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$H'(t)=\int dx\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{*}(xt)\hat{\phi}(x)-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(xt)\hat{\phi}^{+}(x)\right). \tag{4.8}$$

この結果を使うと Bose 場の演算子の期待値は

$$\Psi(xt)=Tr\rho'(t)D[\Psi(xt)]^{+}\hat{\phi}(x)D[\Psi(xt)] \tag{4.9}$$

となり，次の関係が成り立つ。

$$Tr\rho'(t)\hat{\phi}(x)=0,\quad Tr\rho'(t)\hat{\phi}^{+}(x)=0. \tag{4.10}$$

凝縮体 $\Psi(xt)$ に対する方程式は，(2.6) および変換された密度行列 $\rho'(t)$を使うと，

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(xt)&=Tr\rho(t)[\hat{\phi}(x),\ H]\\&=Tr\rho'(t)[\hat{\phi}(x),\ H(t)]\end{aligned} \tag{4.11}$$

となる。交換関係 (2.2) を使って (4.11) を計算すると，

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(xt)&=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(xt)+g|\Psi(xt)|^2\Psi(xt)\\&\quad+U(x)\Psi(xt)+g\Psi^{*}(xt)\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_t\\&\quad+2g\Psi(xt)\langle\hat{\phi}^{+}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_t+g\langle\hat{\phi}^{+}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_t\end{aligned} \tag{4.12}$$

となる。ここで

$$\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_t\equiv Tr\rho'(t)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x), \tag{4.13}$$

$$\langle\hat{\phi}^{+}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_t\equiv Tr\rho'(t)\hat{\phi}^{+}(x)\hat{\phi}(x), \tag{4.14}$$

$$\langle\hat{\phi}^{+}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_t\equiv Tr\rho'(t)\hat{\phi}^{+}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) \tag{4.15}$$

である。第 2 章で示したように凝縮体の波動関数を定常値と偏差の形に表わす。

$$\Psi(xt)=(\Psi_0(x)+\Delta(xt))e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t}. \tag{4.16}$$

ハミルトニアンに対し $\Delta(xt)$ の 1 次までの線形近似を行い，

$$\begin{aligned}&H(t)+H'(t)\\&=H[\Psi(xt),\ \Psi^{*}(xt)]+H_0+H_1(t)\end{aligned} \tag{4.17}$$

とする。ここで H_0 は $\Delta(xt)$ の 0 次の項，$H_1(t)$ は $\Delta(xt)$ の 1 次の項である。変換された密度行列 $\rho'(t)$ は準粒子集団の統計的性質を示し，その時間変化を支配するハミルトニアンは凝縮体の定常値からの偏差 $\Delta(xt)$ に依存した外場を含んだ形をしており，線形応答理論を使って論じることができる[16)]。熱平衡状態での密度行列を

$$\rho_c=\exp(-\beta H_0)/Tr\exp(-\beta H_0) \tag{4.18}$$

とし，ここで$\beta=(k_BT)^{-1}$，密度行列を

$$\rho'(t)=\rho_c+\Delta\rho(t) \tag{4.19}$$

とおくと，(4.6) (4.17) から$\Delta\rho(t)$は次となる。

$$\Delta\rho(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty}dt'e^{-i\frac{t'}{\hbar}H_0}[H_1(t-t'),\ \rho_c]e^{i\frac{t'}{\hbar}H_0}. \tag{4.20}$$

この結果を使うと，(4.13) は

$$\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_t=\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0+\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_1+\cdots, \tag{4.21}$$

$$\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0=Tr\rho_c\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x), \tag{4.22}$$

$$\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_1$$

$$=-\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty dt' Tr[H_1(t-t'),\ \rho_c]e^{i\frac{t'}{\hbar}H_0}\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)e^{-i\frac{t'}{\hbar}H_0} \tag{4.23}$$

となる。$H_1(t)$ を使い，(4.23) を相互作用定数 g の最低次で求める。(4.14)に対しても同様な計算を行い，(4.15)を省略すると，(4.12)の $\Delta(xt)$ の 0 次と 1 次の方程式は次となる。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu\right)\Psi_0(x)+g|\Psi_0(x)|^2\Psi_0(x)$$
$$+U(x)\Psi_0(x)+g\Psi_0^*(x)\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0$$
$$+2g\Psi_0(x)\langle\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0=0, \tag{4.24}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Delta(xt)$$
$$=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu\right)\Delta(xt)+g\Psi_0(x)^2\Delta^*(xt)$$
$$+2g|\Psi_0(x)|^2\Delta(xt)+U(x)\Delta(xt)$$
$$+g\Delta^*(xt)\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0$$
$$+2g\Delta(xt)\langle\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0$$
$$+\int_0^\infty dt'\int dy\Delta^*(y,\ t-t')\Lambda^{--}(\mathrm{x},\ y;\ t')$$
$$+\int_0^\infty dt'\int dy\Delta(y,\ t-t')\Lambda^{+-}(\mathrm{x},\ y;\ t'). \tag{4.25}$$

ここで

$$\Lambda^{\pm\pm}(\mathrm{x},\ y;\ t)$$
$$=-\frac{i}{\hbar}\left\langle\left[e^{i\frac{t}{\hbar}H_0}\hat{C}^\pm(x)e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0},\ \hat{C}^\pm(y)\right]\right\rangle_0, \tag{4.26}$$

$$\hat{C}^+(x)=2g\Psi_0^*(x)\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)+g\Psi_0(x)\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^+(x), \tag{4.27}$$

$$\hat{C}^-(x)=2g\Psi_0(x)\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)+g\Psi_0^*(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) \tag{4.28}$$

である。凝縮体の定常値 $\Psi_0(x)$ に対する (4.24) と偏差 $\Delta(xt)$ に対する (4.25) は絶対温度に対する (2.25) と (2.26) を有限温度に拡張した式である。以後は Popov[17]によって導入された非対角相関 $\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0$,$\langle\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^+(x)\rangle_0$ を無視する近似 (Popov 近似) を使う。

次に凝縮体の密度と速度ポテンシャルの定常値からの偏差に対する式を (2.29) (2.30) および (4.25) を使って求める。

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n(xt)$$
$$=-\nabla(\delta n(xt)v_0(x)+n_0(x)\nabla\delta\Phi(xt))$$
$$+\frac{1}{i\hbar}\sqrt{n_0(x)}\left[\int_0^\infty dt'\int dy\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n_0(x)}}\delta n(y,\ t-t')\right.\right.$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ y;\ t')-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ y;\ t')$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ y;\ t')-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ y;\ t'))$$
$$+\frac{1}{2}\frac{2mi}{\hbar}\sqrt{n_0(x)}\delta\Phi(y,\ t-t')$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ y;\ t')-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ y;\ t')$$
$$\left.\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ y;\ t')+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ y;\ t'))\right\}\right], \tag{4.29}$$

$$n_0(x)\frac{\partial}{\partial t}\delta\Phi(xt)$$
$$=-\nabla\{v_0(x)n_0(x)\delta\Phi(xt)\}$$
$$+\frac{\hbar^2}{4m^2}\left\{\nabla^2\delta n(xt)-\nabla\left(\delta n(xt)\frac{1}{n_0(x)}\nabla n_0(x)\right)\right\}$$
$$-\frac{g}{m}n_0(x)\delta n(xt)$$
$$-\frac{1}{2m}\sqrt{n_0(x)}\left[\int_0^\infty dt'\int dy\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n_0(x)}}\delta n\ (y,\ t-t')\right.\right.$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ y;\ t')+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ y;\ t')$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ y;\ t')+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ y;\ t'))$$
$$+\frac{1}{2}\frac{2mi}{\hbar}\sqrt{n_0(x)}\delta\Phi(y,\ t-t')$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ y;\ t')+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ y;\ t')$$
$$\left.\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ y;\ t')-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ y;\ t'))\right\}\right]. \tag{4.30}$$

ここで相関関数 $\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ y;\ t)$ は

$$\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ y;\ t)=e^{\pm iS(x)}e^{\pm iS(y)}\Lambda^{\pm\pm}(x,\ y;\ t) \tag{4.31}$$

である。今後は第 2 章で論じたように定常状態では流れがない ($v_0(x)=0$) とし，さらに相関関数 $\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ y;\ t)$ に対して空間座標 x と y が一致する場合のみ値を有する局所近似を用いる。

有限温度の場合，凝縮体密度 $n_0(x)$ は Thomas-Fermi 近似を使うと (4.24) より

$$n_0(x)=[\mu-U(x)-2gn_1(x)]/g \tag{4.32}$$

となる。ここで $n_1(x)$ は熱的励起準粒子集団の密度である。

$$n_1(x)=\langle\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0. \tag{4.33}$$

第 3 章で示した凝縮体の広がりを示す量 $\langle x_i^2\rangle$ ($i=1,\ 2,\ 3$) の時間微分は $i=1$ の場合を記すと，

(4.29)(4.30) を使い，

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1{}^2\rangle$$
$$=\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{g}{m}\delta n(xt)\right)$$
$$-\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{4mn_0(x)}\int_0^\infty dt'\delta n(x,\ t-t')\right.$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))$$
$$+\frac{i}{2\hbar}\int_0^\infty dt'\delta\Phi(x,\ t-t')$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))\right]$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\left[\frac{(-i)}{2\hbar}\int_0^\infty dt'\frac{\partial}{\partial t}\delta n(x,\ t-t')\right.$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))$$
$$+\frac{m}{\hbar^2}n_0(x)\int_0^\infty dt'\frac{\partial}{\partial t}\delta\Phi(x,\ t-t')$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))\right] \tag{4.44}$$

となる。$\delta n(xt)$ と $\delta\Phi(xt)$ を(3.8)(3.10)を使って表わすと，(4.44) は

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1{}^2\rangle=\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{g}{m}\left\{\left(n_0(x)\right.\right.\right.$$
$$\left.+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)\frac{\delta b_1}{b_{01}}+\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial n_0(x)}{\partial x_2}\right)\frac{\delta b_2}{b_{02}}$$
$$\left.\left.+\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial n_0(x)}{\partial x_3}\right)\frac{\delta b_3}{b_{03}}\right\}\right]$$
$$-\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{4mn_0(x)}\int_0^\infty dt'\left\{-\left(n_0(x)\right.\right.\right.$$
$$\left.+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)\frac{\delta b_1(t-t')}{b_{01}}-\left(n_0(x)\right.$$
$$\left.+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)\frac{\delta b_2(t-t')}{b_{02}}$$
$$\left.-\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)\frac{\delta b_3(t-t')}{b_{03}}\right\}$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))$$
$$+\frac{i}{2\hbar}\int_0^\infty dt'\left\{\frac{x_1{}^2}{2}\frac{1}{b_{01}}\frac{d}{dt}\delta b_1(t-t')\right.$$
$$+\frac{x_2{}^2}{2}\frac{1}{b_{02}}\frac{d}{dt}\delta b_2(t-t')$$
$$\left.+\frac{x_3{}^2}{2}\frac{1}{b_{03}}\frac{d}{dt}\delta b_3(t-t')\right\}$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))\right]$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\left[\frac{(-i)}{2\hbar}\int_0^\infty dt'\left\{-\left(n_0(x)\right.\right.\right.$$
$$\left.+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)\frac{1}{b_{01}}\frac{d}{dt}\delta b_1(t-t')$$
$$-\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)\frac{1}{b_{02}}\frac{d}{dt}\delta b_2(t-t')$$
$$\left.-\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)\frac{1}{b_{03}}\frac{d}{dt}\delta b_3(t-t')\right\}$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))$$
$$+\frac{m}{\hbar^2}n_0(x)\int_0^\infty dt'\left\{\frac{x_1{}^2}{2}\frac{1}{b_{01}}\frac{d^2}{dt^2}\delta b_1(t-t')\right.$$
$$+\frac{x_2{}^2}{2}\frac{1}{b_{02}}\frac{d^2}{dt^2}\delta b_2(t-t')$$
$$\left.+\frac{x_3{}^2}{2}\frac{1}{b_{03}}\frac{d^2}{dt^2}\delta b_3(t-t')\right\}$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ t')-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ t')$$
$$\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ t')+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ t'))\right] \tag{4.45}$$

となる。一方，(3.18) に対応して

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x_1^2\rangle=\left\{\frac{2}{b_{01}}\frac{d^2}{dt^2}\delta b_1\right\}\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2 n_0(x) \tag{4.46}$$

である。$\delta b_i(t)$ の時間依存性を $\exp(-i\omega t)$ として，$\delta b_i(0)(i=1,\ 2,\ 3)$ の方程式を求める。ここでも $i=1$ の場合のみを記すが，$i=2,\ 3$ の場合も同様である。

$$-\omega^2\frac{2}{b_{01}}\delta b_1(0)\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2 n_0(x)$$
$$=\frac{1}{b_{01}}\delta b_1(0)\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{g}{m}\left(n_0(x)\right.\right.$$
$$\left.\left.+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{b_{02}}\delta b_2(0)\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{g}{m}\left(n_0(x)\right.\right.$$
$$\left.\left.+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{b_{03}}\delta b_3(0)\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{g}{m}\left(n_0(x)\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\Big)\Big]\\
&+\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{1}{4mn_0(x)}\Big\{\Big(n_0(x)\\
&+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\Big)\frac{1}{b_{01}}\delta b_1(0)\\
&+\Big(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\Big)\frac{1}{b_{02}}\delta b_2(0)\\
&+\Big(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\Big)\frac{1}{b_{03}}\delta b_3(0)\Big\}\\
&\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)\\
&+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega))\Big]\\
&-\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{i}{2\hbar}(-i\omega)\Big\{\frac{x_1{}^2}{2}\frac{1}{b_{01}}\delta b_1(0)\\
&+\frac{x_2{}^2}{2}\frac{1}{b_{02}}\delta b_2(0)+\frac{x_3{}^2}{2}\frac{1}{b_{03}}\delta b_3(0)\Big\}\\
&\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)\\
&-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega))\Big]\\
&+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\Big[\Big(\frac{i}{2\hbar}\Big)(-i\omega)\Big\{\Big(n_0(x)\\
&+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\Big)\frac{1}{b_{01}}\delta b_1(0)\\
&+\Big(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\Big)\frac{1}{b_{02}}\delta b_2(0)\\
&+\Big(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\Big)\frac{1}{b_{03}}\delta b_3(0)\Big\}\\
&\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)\\
&+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega))\Big]\\
&+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\Big[\frac{m}{\hbar^2}n_0(x)(-i\omega)^2\Big\{\frac{x_1{}^2}{2}\frac{1}{b_{01}}\delta b_1(0)\\
&+\frac{x_2{}^2}{2}\frac{1}{b_{02}}\delta b_2(0)+\frac{x_3{}^2}{2}\frac{1}{b_{03}}\delta b_3(0)\Big\}\\
&\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)\\
&-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega))\Big]. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ \omega)=\int_0^\infty dt e^{i\omega t-\delta t}\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ t) \qquad (4.48)
$$

である。(4.47) の右辺の第1項の係数を (4.32) を使って計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{g}{m}\Big(n_0(x)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\Big)\Big]\\
&=-\frac{2g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x)-2\lambda_1{}^2\omega_0{}^2\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2 n_0(x)\\
&\quad-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}n_1(x) \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

となる。同様に右辺の第2項, 第3項の係数を計算すると, 次となる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{g}{m}\Big(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\Big)\Big]\\
&=-\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x)\\
&\quad-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1 x_2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}n_1(x),\\
&\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{g}{m}\Big(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\Big)\Big]\\
&=-\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x)\\
&\quad-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1 x_3 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}n_1(x). \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

$\delta b_i(0)(i=1,\ 2,\ 3)$ の式を行列表現で整理すると,

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
-\omega^2\frac{2}{N_0}\int dx x_1{}^2 n_0(x) & 0 & 0\\
0 & -\omega^2\frac{2}{N_0}\int dx x_2{}^2 n_0(x) & 0\\
0 & 0 & -\omega^2\frac{2}{N_0}\int dx x_3{}^2 n_0(x)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\frac{\delta b_1}{b_{01}}\\ \frac{\delta b_2}{b_{02}}\\ \frac{\delta b_3}{b_{03}}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}
-2\lambda_1{}^2\omega_0{}^2\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2 n_0(x)-\frac{2g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x) & -\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x) & -\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x)\\
-\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x) & -2\lambda_2{}^2\omega_0{}^2\frac{1}{N_0}\int dx x_2{}^2 n_0(x)-\frac{2g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x) & -\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x)\\
-\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x) & -\frac{g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x) & -2\lambda_3{}^2\omega_0{}^2\frac{1}{N_0}\int dx x_3{}^2 n_0(x)-\frac{2g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx n_0{}^2(x)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\frac{\delta b_1}{b_{01}}\\ \frac{\delta b_2}{b_{02}}\\ \frac{\delta b_3}{b_{03}}\end{bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}
C_{11}(\omega) & C_{12}(\omega) & C_{13}(\omega)\\
C_{21}(\omega) & C_{22}(\omega) & C_{23}(\omega)\\
C_{31}(\omega) & C_{32}(\omega) & C_{33}(\omega)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\frac{\delta b_1}{b_{01}}\\ \frac{\delta b_2}{b_{02}}\\ \frac{\delta b_3}{b_{03}}\end{bmatrix} \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

となる。ここで$C_{1j}(\omega)$(j=1, 2, 3) は次で与えられる。

$$C_{11}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}n_1(x)$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{4mn_0(x)}\left(n_0(x)\right.\right.$$
$$\left.+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$\left.+\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))\right]$$
$$-\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{i}{2\hbar}(-i\omega)\frac{x_1^2}{2}\right.$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))\right]$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2\left(\frac{i}{2\hbar}\right)(-i\omega)\left(n_0(x)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2\frac{m}{\hbar^2}n_0(x)(-i\omega)^2\frac{x_1^2}{2}$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$-\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega)), \tag{4.52}$$

$$C_{12}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1 x_2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}n_1(x)$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{4mn_0(x)}\left(n_0(x)\right.\right.$$
$$\left.+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$\left.+\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))\right]$$
$$-\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{i}{2\hbar}(-i\omega)\frac{x_2^2}{2}\right.$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))\right]$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2\left(\frac{i}{2\hbar}\right)(-i\omega)\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2\frac{m}{\hbar^2}n_0(x)(-i\omega)^2\frac{x_2^2}{2}$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$-\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega)), \tag{4.53}$$

$$C_{13}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1 x_3 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}n_1(x)$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{4mn_0(x)}\left(n_0(x)\right.\right.$$
$$\left.+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$\left.+\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))\right]$$
$$-\frac{1}{N_0}\int dx 2x_1 n_0(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{i}{2\hbar}(-i\omega)\frac{x_3^2}{2}\right.$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$\left.-\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))\right]$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2\left(\frac{i}{2\hbar}\right)(-i\omega)\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$+\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega))$$
$$+\frac{1}{N_0}\int dx x_1^2\frac{m}{\hbar^2}n_0(x)(-i\omega)^2\frac{x_3^2}{2}$$
$$\times(\tilde{\Lambda}^{+-}(x,x;\omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,x;\omega)$$
$$-\tilde{\Lambda}^{--}(x,x;\omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,x;\omega)). \tag{4.54}$$

$C_{ij}(i=2,3,\ j=1,2,3)$ についても同様に求めることができる。

次に準粒子に対する運動を考え，有限温度で重要な役割を示す $n_1(x)$，相関関数 $\Lambda^{\pm\pm}(x,x;\omega)$ の値を求める。ここで準粒子の波長はトラップポテンシャルと密度の変化する長さに比べて短いため，半古典的近似が成立するとし，局所的には均質であると考える。準粒子に対するハミルトニアンは (4.17) の H_0 で与えられる。

$$H_0=\int dx\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\hat{\phi}^+(x)\nabla\hat{\phi}(x)-\mu\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)\right.$$
$$+U(x)\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)+\frac{g}{2}m^*(x)\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)$$
$$\left.+2gn(x)\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)+\frac{g}{2}m(x)\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)\right]. \tag{4.55}$$

ここで

$$n(x)=\Psi_0^*(x)\Psi_0(x)+\langle\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0, \tag{4.56}$$
$$m(x)=\Psi_0(x)^2+\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0 \tag{4.57}$$

である。前章と同様に $\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\rangle_0$ を無視する Popov 近似を導入し，$m(x)=\Psi_0(x)^2$ とする。ハミ

ルトニアン(4.55)は次のBogoliubov変換によって対角化できる。

$$\hat{\varphi}(x)=\sum_j(e^{iS(x)}\tilde{u}_j(x)\hat{a}_j+e^{iS(x)}\tilde{v}_j^*(x)\hat{a}_j^+), \quad (4.58)$$

$$\hat{\varphi}^+(x)=\sum_j(e^{-iS(x)}\tilde{u}_j^*(x)\hat{a}_j^++e^{-iS(x)}\tilde{v}_j(x)\hat{a}_j). \quad (4.59)$$

ここで $\hat{a}_j$, $\hat{a}_j^+$ はボーズ型交換関係に従う準粒子の消滅，生成演算子である。$\tilde{u}_j(x)$, $\tilde{v}_j(x)$は次の固有値方程式に従う。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla+i\nabla S(x))^2+U(x)-\mu\right]\tilde{u}_j(x)+2gn(x)\tilde{u}_j(x)+gn_0(x)\tilde{v}_j(x)=E_j\tilde{u}_j(x), \quad (4.60)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla-i\nabla S(x))^2+U(x)-\mu\right]\tilde{v}_j(x)+2gn(x)\tilde{v}_j(x)+gn_0(x)\tilde{u}_j(x)=-E_j\tilde{v}_j(x). \quad (4.61)$$

定常状態では流れがない ($\nabla S(x)=0$) とし，化学ポテンシャル μ は (4.32) より

$$\mu=gn_0(x)+U(x)+2gn_1(x) \quad (4.62)$$

とすると，$\tilde{u}_j(x)$, $\tilde{v}_j(x)$, E_j は次となる。

$$\tilde{u}_j^2(x)=1+\tilde{v}_j^2(x)=\frac{(E_j^2+g^2n_0(x)^2)^{\frac{1}{2}}+E_j}{2E_j}, \quad (4.63)$$

$$\tilde{u}_j(x)\tilde{v}_j(x)=-\frac{gn_0(x)}{2E_j}, \quad (4.64)$$

$$E_j=\left[\left(\frac{p_j^2}{2m}+gn_0(x)\right)^2-g^2n_0(x)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.65)$$

ここで p_j は準粒子の運動量であり，準粒子のハミルトニアン (4.55) は

$$H_0=-\sum_j E_j\int dx|\tilde{v}_j(x)|^2+\sum_j E_j\alpha_j^+\alpha_j \quad (4.66)$$

となる。(4.33) で与えられる $\langle\hat{\varphi}^+(x)\hat{\varphi}(x)\rangle_0$ は

$$\langle\hat{\varphi}^+(x)\hat{\varphi}(x)\rangle_0=\sum_j[\{|\tilde{u}_j(x)|^2+|\tilde{v}_j(x)|^2\}N(E_j)+|\tilde{v}_j(x)|^2] \quad (4.67)$$

となり，ここで $N(E_j)$ は準粒子に対する分布関数である。

$$N(E_j)=\langle\alpha_j^+\alpha_j\rangle_0=\frac{1}{e^{\beta E_j}-1}. \quad (4.68)$$

次に相関関数 $\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ \omega)$ を計算する。(4.26) (4.27) (4.28) よりハミルトニアン (4.66) を使うと，

$$\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ t)=-\frac{i}{\hbar}\sum_i\sum_k(N(E_i)-N(E_k))e^{i\frac{t(E_i-E_k)}{\hbar}}\times\langle i|\hat{C}^\pm(x)|k\rangle\langle k|\hat{C}^\pm(x)|i\rangle \quad (4.69)$$

となり，

$$\langle i|\hat{C}^+(x)|k\rangle=2g\sqrt{n_0(x)}\,e^{-iS(x)}[\tilde{u}_i^*(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{v}_i^*(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{u}_i^*(x)\tilde{v}_k(x)], \quad (4.70)$$

$$\langle i|\hat{C}^-(x)|k\rangle=2g\sqrt{n_0(x)}\,e^{iS(x)}[\tilde{u}_i^*(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{v}_i^*(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i^*(x)\tilde{u}_k(x)] \quad (4.71)$$

である。ここで $\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ t)$ のフーリエ変換

$$\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ \omega)=\lim_{\delta\to0+}\int_0^\infty\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ t)e^{i\omega t-\delta t}dt \quad (4.72)$$

を行うと，

$$\tilde{\Lambda}^{\pm\pm}(x,\ x;\ \omega)=\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\delta}\times\langle i|\hat{C}^\pm(x)|k\rangle\langle k|\hat{C}^\pm(x)|i\rangle \quad (4.73)$$

となる。(4.70) (4.71) と (4.31) を使って次の計算を行う。ただし，$\tilde{u}_i(x)$, $\tilde{v}_i(x)$ は実数とする。

$$\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega)$$
$$=(2g)^2n_0(x)\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\delta}\times(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))^2, \quad (4.74)$$

$$\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega)$$
$$=(2g)^2n_0(x)\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\delta}\times(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))\times(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x)), \quad (4.75)$$

$$\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega)$$
$$=(2g)^2n_0(x)\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\delta}\times(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))$$

$$\times(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x)), \tag{4.76}$$

$$\tilde{\Lambda}^{+-}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{++}(x,\ x;\ \omega)-\tilde{\Lambda}^{--}(x,\ x;\ \omega)+\tilde{\Lambda}^{-+}(x,\ x;\ \omega)$$
$$=(2g)^2 n_0(x)\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\delta}\times(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))^2. \tag{4.77}$$

この結果を使って $C_{ij}(\omega)$ を計算すると，

$$C_{11}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\left(n_0(x)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)H_1(x,\ x;\ \omega), \tag{4.78}$$

$$C_{12}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1 x_2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_2{}^2\left(n_0(x)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)H_2(x,\ x;\ \omega)+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)H_3(x,\ x;\ \omega), \tag{4.79}$$

$$C_{13}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_1 x_3 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_3{}^2\left(n_0(x)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)H_2(x,\ x;\ \omega)+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)H_3(x,\ x;\ \omega), \tag{4.80}$$

$$C_{21}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_2 x_1 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)H_2(x,\ x;\ \omega)+\frac{1}{N_0}\int dx x_2{}^2\left(n_0(x)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)H_3(x,\ x;\ \omega), \tag{4.81}$$

$$C_{22}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_2{}^2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_2{}^2\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)H_1(x,\ x;\ \omega), \tag{4.82}$$

$$C_{23}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_2 x_3 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_3{}^2\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)H_2(x,\ x;\ \omega)+\frac{1}{N_0}\int dx x_2{}^2\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)H_3(x,\ x;\ \omega), \tag{4.83}$$

$$C_{31}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_3 x_1 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_1{}^2\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)H_2(x,\ x;\ \omega)+\frac{1}{N_0}\int dx x_3{}^2\left(n_0(x)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}n_0(x)\right)H_3(x,\ x;\ \omega), \tag{4.84}$$

$$C_{32}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_3 x_2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_2}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_2{}^2\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)H_2(x,\ x;\ \omega)+\frac{1}{N_0}\int dx x_3{}^2\left(n_0(x)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}n_0(x)\right)H_3(x,\ x;\ \omega), \tag{4.85}$$

$$C_{33}(\omega)=-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dx x_3{}^2 n_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}n_1(x)+\frac{1}{N_0}\int dx x_3{}^2\left(n_0(x)+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}n_0(x)\right)H_1(x,\ x;\ \omega) \tag{4.86}$$

となる。ここで

$$H_1(x,\ x;\ \omega)=(2g)^2 n_0(x)\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\varepsilon}\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)\times\Bigg[\left(\frac{\hbar\omega}{2gn_0(x)}\right)^{\frac{1}{2}}(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))+\left(\frac{2gn_0(x)}{\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))\Bigg]^2, \tag{4.87}$$

$$H_2(x,\ x;\ \omega)=(2g)^2 n_0(x)\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\varepsilon}\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)\times\Bigg[\left(\frac{\hbar\omega}{2gn_0(x)}\right)(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))^2+(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))\Bigg], \tag{4.88}$$

$$H_3(x,\ x;\ \omega)$$
$$=(2g)^2 n_0(x)\frac{1}{\hbar}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\varepsilon}\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)$$
$$\times\Big[(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)$$
$$+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))$$
$$+\left(\frac{2gn_0(x)}{\hbar\omega}\right)(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))^2\Big] \tag{4.89}$$

であり，$H_1(x,\ x;\ \omega)$，$H_2(x,\ x;\ \omega)$，$H_3(x,\ x;\ \omega)$ の間には

$$H_1(x,\ x;\ \omega)=H_2(x,\ x;\ \omega)+H_3(x,\ x;\ \omega) \tag{4.90}$$

の関係がある。

次に第3章の座標 $X_1=x_1/b_{01}$, $X_2=x_2/b_{02}$, $X_3=x_3/b_{03}$ を導入する。(3.20) (3.21) (3.25) を使うと，(4.51) は次となる。

$$\begin{bmatrix} -\omega^2+\lambda_1{}^2\omega_0{}^2+\dfrac{2Q_1}{b_{01}{}^3b_{02}b_{03}} & \dfrac{Q_1}{b_{01}{}^3b_{02}b_{03}} & \dfrac{Q_1}{b_{01}{}^3b_{02}b_{03}} \\ \dfrac{Q_2}{b_{01}b_{02}{}^3b_{03}} & -\omega^2+\lambda_2{}^2\omega_0{}^2+\dfrac{2Q_2}{b_{01}b_{02}{}^3b_{03}} & \dfrac{Q_2}{b_{01}b_{02}{}^3b_{03}} \\ \dfrac{Q_3}{b_{01}b_{02}b_{03}{}^3} & \dfrac{Q_3}{b_{01}b_{02}b_{03}{}^3} & -\omega^2+\lambda_3{}^2\omega_0{}^2+\dfrac{Q_3}{b_{01}b_{02}b_{03}{}^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\delta b_1}{b_{01}}\\ \dfrac{\delta b_2}{b_{02}}\\ \dfrac{\delta b_3}{b_{03}}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \dfrac{C_{11}}{\frac{2b_{01}{}^2}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0} & \dfrac{C_{12}}{\frac{2b_{01}{}^2}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0} & \dfrac{C_{13}}{\frac{2b_{01}{}^2}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0} \\ \dfrac{C_{21}}{\frac{2b_{02}{}^2}{N_0}\int dXX_2{}^2\tilde{n}_0} & \dfrac{C_{22}}{\frac{2b_{02}{}^2}{N_0}\int dXX_2{}^2\tilde{n}_0} & \dfrac{C_{23}}{\frac{2b_{02}{}^2}{N_0}\int dXX_2{}^2\tilde{n}_0} \\ \dfrac{C_{31}}{\frac{2b_{03}{}^2}{N_0}\int dXX_3{}^2\tilde{n}_0} & \dfrac{C_{32}}{\frac{2b_{03}{}^2}{N_0}\int dXX_3{}^2\tilde{n}_0} & \dfrac{C_{33}}{\frac{2b_{03}{}^2}{N_0}\int dXX_3{}^2\tilde{n}_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\delta b_1}{b_{01}}\\ \dfrac{\delta b_2}{b_{02}}\\ \dfrac{\delta b_3}{b_{03}}\end{bmatrix}. \tag{4.91}$$

トラップポテンシャルが軸対称な場合（$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=\lambda$）を考え，$Q_1=Q_2=Q$，$b_{01}=b_{02}=b_0$ とおき，関係式 (3.27) (3.28) を使うと，(4.91) は次のように書くことができる。

$$(-\omega^2\boldsymbol{1}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}. \tag{4.92}$$

これは (3. 29) に対する有限温度の場合の式であり，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ は (3.30)，$\boldsymbol{C}$ は (4.91) の右辺の行列である。$\lambda_1=\lambda_2$ の場合は

$$C_{11}=C_{22},\quad C_{12}=C_{21},$$
$$C_{13}=C_{23},\quad C_{31}=C_{32} \tag{4.93}$$

の関係が成り立つ。第3章の行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する行列 $\boldsymbol{B}$ およびその逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を使うと，固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は次式に従う。

$$(-\omega^2\boldsymbol{1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi} \tag{4.94}$$

ここで

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\omega_-{}^2 & 0 & 0\\ 0 & \omega_+{}^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega_2{}^2\end{bmatrix} \tag{4.95}$$

であり，

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} \tag{4.96}$$

である。行列 $\boldsymbol{D}$ の要素 $D_{ij}(i,\ \mathrm{j}=1,\ 2,\ 3)$ は (3. 35) (3.38) を使うと次となる。

$$D_{11}=\frac{2}{\frac{2b_0{}^2}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0}\Big[\frac{q_+-4}{2(q_+-q_-)}\{C_{11}+C_{12}$$
$$+C_{13}(q_--4)\}\Big]$$
$$+\frac{1}{\frac{2b_{03}{}^2}{N_0}\int dXX_3{}^2\tilde{n}_0}\Big[-\frac{1}{q_+-q_-}\{2C_{31}$$
$$+C_{33}(q_--4)\}\Big], \tag{4.97}$$

$$D_{12}=\frac{2}{\frac{2b_0{}^2}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0}\Big[\frac{q_+-4}{2(q_+-q_-)}\{C_{11}+C_{12}$$
$$+C_{13}(q_+-4)\}\Big]$$
$$+\frac{1}{\frac{2b_{03}{}^2}{N_0}\int dXX_3{}^2\tilde{n}_0}\Big[-\frac{1}{q_+-q_-}\{2C_{31}$$
$$+C_{33}(q_+-4)\}\Big], \tag{4.98}$$

$$D_{13}=0, \tag{4.99}$$

$$D_{21}=\frac{2}{\frac{2b_0{}^2}{N_0}\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0}\Big[-\frac{q_--4}{2(q_+-q_-)}\{C_{11}+C_{12}$$
$$+C_{13}(q_--4)\}\Big]$$

$$+\frac{1}{\frac{2b_{03}^2}{N_0}\int dXX_3^2\tilde{n}_0}\Big[\frac{1}{q_+-q_-}\{2C_{31}+C_{33}(q_--4)\}\Big], \tag{4.100}$$

$$D_{22}=\frac{2}{\frac{2b_0^2}{N_0}\int dXX_1^2\tilde{n}_0}\Big[-\frac{q_--4}{2(q_+-q_-)}\{C_{11}+C_{12}+C_{13}(q_+-4)\}\Big]+\frac{1}{\frac{2b_{03}^2}{N_0}\int dXX_3^2\tilde{n}_0}\Big[\frac{1}{q_+-q_-}\{2C_{31}+C_{33}(q_+-4)\}\Big], \tag{4.101}$$

$$D_{23}=0, \tag{4.102}$$

$$D_{31}=0, \tag{4.103}$$

$$D_{32}=0, \tag{4.104}$$

$$D_{33}=\frac{1}{\frac{2b_0^2}{N_0}\int dXX_1^2\tilde{n}_0}\ (C_{11}-C_{12}). \tag{4.105}$$

以上の結果を使って，(4.94) を書くと

$$(-\omega^2+\omega_-^2)\xi_-=D_{11}\xi_-+D_{12}\xi_+, \tag{4.106}$$

$$(-\omega^2+\omega_+^2)\xi_+=D_{21}\xi_-+D_{22}\xi_+, \tag{4.107}$$

$$(-\omega^2+\omega_2^2)\xi_2=D_{33}\xi_2 \tag{4.108}$$

となる。この結果が第3章で求めた固有モード周波数 ω_-，ω_+，ω_2 のモード振動に対して有限温度でのモード周波数と減衰割合を決める基礎方程式となる。

以下では，具体的に ω_2 モード振動のモード周波数と減衰割合を求める。(4.78) (4.79) (4.90) (4.105) より

$$D_{33}=\frac{1}{\frac{2b_0^2}{N_0}\int dXX_1^2\tilde{n}_0}\times\Big[-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dXX_1^2\tilde{n}_0\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}n_1(x)+b_0^2\frac{1}{N_0}\int dXX_1^2\Big(\tilde{n}_0+X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0\Big)H_1(x,\ x;\ \omega)+\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dXX_1X_2\tilde{n}_0\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}n_1(x)-b_0^2\frac{1}{N_0}\int dXX_1^2\Big(\tilde{n}_0+X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0\Big)H_1(x,\ x;\ \omega)\Big]$$

$$=\frac{1}{\frac{2b_0^2}{N_0}\int dXX_1^2\tilde{n}_0}\times\Big[-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dX\tilde{n}_0\Big(X_1^2\frac{\partial^2}{\partial X_1^2}n_1(x)-X_1X_2\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}n_1(x)\Big)+b_0^2\frac{1}{N_0}\int dXX_1^2\Big(X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0-X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0\Big)H_1(x,\ x;\ \omega)\Big] \tag{4.109}$$

である。次に $H_1(x,\ x;\ \omega)$ の計算を行う。(4.87) より

$$B_{ik}(x)=2g(n_0(x))^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{2gn_0(x)}{\hbar\omega}\Big)^{\frac{1}{2}}(\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)-\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))+\frac{1}{2}\Big(\frac{\hbar\omega}{2gn_0(x)}\Big)^{\frac{1}{2}}(2\tilde{u}_i(x)\tilde{u}_k(x)+2\tilde{v}_i(x)\tilde{v}_k(x)+\tilde{v}_i(x)\tilde{u}_k(x)+\tilde{u}_i(x)\tilde{v}_k(x))\Big] \tag{4.110}$$

とおくと

$$H_1(x,\ x;\ \omega)=\frac{2\omega}{\hbar^2}\sum_i\sum_k\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\varepsilon}(B_{ik}(x))^2 \tag{4.111}$$

である。ここで

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)+i\varepsilon}=P\frac{1}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)}-i\pi\delta\Big(\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)\Big) \tag{4.112}$$

の関係を使うと，

$$H_1(x,\ x;\ \omega)=ReH_1(x,\ x;\ \omega)+iImH_1(x,\ x;\ \omega), \tag{4.113}$$

$$ReH_1(x,\ x;\ \omega)=\frac{2\omega}{\hbar^2}\sum_i\sum_k P\frac{N(E_i)-N(E_k)}{\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)}(B_{ik})^2, \tag{4.114}$$

$$ImH_1(x,\ x;\ \omega)=-\pi\frac{2\omega}{\hbar^2}\sum_i\sum_k(B_{ik})^2(N(E_i)-N(E_k))$$

$$\times\delta\left(\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)\right) \tag{4.115}$$

となる。ω_2 モード振動の複素モード周波数 ω を

$$\hbar\omega=\hbar\tilde{\omega}_2-i\Gamma_{22} \tag{4.116}$$

とすると，(4.108) より

$$\hbar\omega=\frac{\hbar^2\omega_2{}^2}{\hbar\omega}-\frac{\hbar^2 D_{33}}{\hbar\omega} \tag{4.117}$$

となるので，

$$\hbar\tilde{\omega}_2=\frac{\hbar^2\omega_2{}^2}{\hbar\omega}-\frac{\hbar^2}{\hbar\omega}ReD_{33}, \tag{4.118}$$

$$\Gamma_{22}=\frac{\hbar^2}{\hbar\omega}ImD_{33} \tag{4.119}$$

である。ここで D_{33} の実部と虚部は (4.109) (4.113) より

$$\begin{aligned}ReD_{33}=&\frac{1}{\dfrac{2b_0{}^2}{N_0}\displaystyle\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0}\\&\times\left[-\frac{4g}{m}\frac{1}{N_0}\int dX\tilde{n}_0\left(X_1{}^2\frac{\partial^2}{\partial X_1{}^2}n_1(x)\right.\right.\\&\left.-X_1X_2\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2}n_1(x)\right)\\&+b_0{}^2\frac{1}{N_0}\int dXX_1{}^2\left(X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0\right.\\&\left.\left.-X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0\right)ReH_1(x,\ x;\ \omega)\right],\end{aligned} \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned}ImD_{33}=&\frac{1}{\dfrac{2b_0{}^2}{N_0}\displaystyle\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0}\\&\times\left[b_0{}^2\frac{1}{N_0}\int dXX_1{}^2\left(X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0\right.\right.\\&\left.\left.-X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0\right)ImH_1(x,\ x;\ \omega)\right]\end{aligned} \tag{4.121}$$

となる。(4.115) (4.119) を使うと減衰割合は

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}=&-\frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{\dfrac{2}{N_0}\displaystyle\int dXX_1{}^2\tilde{n}_0}\left[\frac{1}{N_0}\int dXX_1{}^2\left(X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0\right.\right.\\&\left.-X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0\right)\\&\left.\times\sum_i\sum_k(B_{ik})^2(N(E_i)-N(E_k))\delta\left(\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)\right)\right]\end{aligned} \tag{4.122}$$

となる。

次に準粒子に対する結果(4.63)～(4.68)を使って，Γ_{22} を計算する。低エネルギー集団励起を考えているので，$E_i\simeq E_k$ と考え，$\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$ を次のように展開する。

$$\tilde{u}_k=\tilde{u}_i+\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial E_i}(E_k-E_i), \tag{4.123}$$

$$\tilde{v}_k=\tilde{v}_i+\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial E_i}(E_k-E_i). \tag{4.124}$$

(4.63) より $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_i$ の E_i による微分は次となる。

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial E}=-\tilde{u}_i\tilde{v}_i{}^2\frac{1}{(E_i{}^2+g^2n_0{}^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.125}$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial E}=-\tilde{u}_i{}^2\tilde{v}_i\frac{1}{(E_i{}^2+g^2n_0{}^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.126}$$

この結果を使うと，

$$\tilde{u}_k\tilde{v}_i-\tilde{v}_k\tilde{u}_i=-\frac{gn_0}{2E_i}\frac{1}{(E_i{}^2+g^2n_0{}^2)^{\frac{1}{2}}}(E_k-E_i) \tag{4.127}$$

であり，$B_{ik}(x)$ を同様に展開すると

$$\begin{aligned}&B_{ik}(x)\\&=(2g\hbar\omega)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2(E_i{}^2(x)+g^2n_0{}^2(x))^{\frac{1}{2}}-gn_0(x)}{2E_i(x)}\right.\\&\left.-\frac{g^2n_0{}^2(x)}{2E_i(x)}\frac{1}{(E_i{}^2(x)+g^2n_0{}^2(x))^{\frac{1}{2}}}\frac{E_k-E_i}{\hbar\omega}\right]\end{aligned} \tag{4.128}$$

となる。$N(E_i)-N(E_k)$ に対してもこの展開を行い，

$$N(E_i)-N(E_k)=-\frac{dN(E_i)}{dE_i}(E_k-E_i) \tag{4.129}$$

となる。ここで (4.65) を使い，

$$\begin{aligned}E_k-E_i&=\frac{\partial E_i}{\partial\vec{p}_i}\cdot(\vec{p}_k-\vec{p}_i)\\&=\frac{\partial E_i}{\partial p_i{}^2}2\vec{p}_i\cdot(\vec{p}_k-\vec{p}_i)\\&=v_gq\cos\theta\end{aligned} \tag{4.130}$$

とする。v_g は準粒子の群速度，$\vec{q}=\vec{p}_k-\vec{p}_i$，$\theta$ は $\vec{p}_i$ と $\vec{q}$ の間の角度である。v_g は (4.65) より

$$v_g=\frac{\partial E_i}{\partial p_i}=\frac{p_i}{mE_i}(E_i{}^2+g^2n_0{}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.131}$$

である。以上の結果を使うと，

$$\begin{aligned}&\sum_i\sum_k(B_{ik})^2(N(E_i)-N(E_k))\delta\left(\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)\right)\\&=\sum_q\int\frac{d\vec{p}_i}{(2\pi\hbar)^3}(2g\hbar\omega)\left[\frac{2(E_i{}^2(x)+g^2n_0{}^2(x))^{\frac{1}{2}}-gn_0(x)}{2E_i(x)}\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{g^2n_0^2(x)}{2E_i(x)}\frac{1}{(E_i^2(x)+g^2n_0^2(x))^{\frac{1}{2}}}\frac{v_gq\cos\theta}{\hbar\omega}\Bigg]^2$$
$$\times\left(-\frac{dN(E_i)}{dE_i}\right)v_gq\cos\theta\delta\left(\omega-\frac{1}{\hbar}v_gq\cos\theta\right)$$
$$=\sum_q\frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty dp_ip_i^2\int_0^\pi d\theta\sin\theta(2g\hbar\omega)$$
$$\times\Bigg[\frac{2(E_i^2+g^2n_0^2)^{\frac{1}{2}}-gn_0}{2E_i}$$
$$-\frac{g^2n_0^2}{2E_i}\frac{1}{(E_i^2+g^2n_0^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{v_gq\cos\theta}{\hbar\omega}\Bigg]^2$$
$$\times\left(-\frac{dN(E_i)}{dE_i}\right)v_gq\cos\theta\delta\left(\omega-\frac{1}{\hbar}v_gq\cos\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2\hbar^3}\sum_g\int_0^\infty dp_ip_i^2\frac{1}{v_gq}\int d(v_gq\cos\theta)(2g\hbar\omega)$$
$$\times\Bigg[\frac{2(E_i^2+g^2n_0^2)^{\frac{1}{2}}-gn_0}{2E_i}$$
$$-\frac{g^2n_0^2}{2E_i}\frac{1}{(E_i^2+g^2n_0^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{v_gq\cos\theta}{\hbar\omega}\Bigg]^2$$
$$\times\left(-\frac{dN(E_i)}{dE_i}\right)v_gq\cos\theta\delta\left(\omega-\frac{1}{\hbar}v_gq\cos\theta\right) \tag{4.132}$$

となる。ここで（4.131）より導かれた

$$\frac{p_i^2dp_i}{v_g}=\frac{m^2E_i^2}{E_i^2+(gn_0)^2}dE_i \tag{4.133}$$

と，$\hbar\omega=cq$ の関係（$c=(gn_0/m)^{\frac{1}{2}}$）を使うと，

$$\sum_i\sum_k(B_{ik})^2\,(N(E_i)-N(E_k))\delta\left(\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)\right)$$
$$=\frac{c}{4\pi^2\hbar^3}\int dE_i\frac{m^2E_i^2}{E_i^2+g^2n_0^2}(2g\hbar\omega)$$
$$\times\Bigg[\frac{2(E_i^2+g^2n_0^2)^{\frac{1}{2}}-gn_0}{2E_i}$$
$$-\frac{g^2n_0^2}{2E_i}\frac{1}{(E_i^2+g^2n_0^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg]^2\left(-\frac{dN(E_i)}{dE_i}\right) \tag{4.134}$$

となる。前の論文[15]のように $z=E_i/gn_0$, $u(z)=(1+z^2)^{\frac{1}{2}}$，$\tau=(\beta gn_0)^{-1}$ とおくと，

$$\frac{dN(E_i)}{dE_i}=-\beta[e^{\frac{z}{2\tau}}-e^{-\frac{z}{2\tau}}]^{-2} \tag{4.135}$$

となるので，高温近似（$\tau\gg1$）の場合で（4.134）計算すると，

$$\sum_i\sum_k(B_{ik})^2(N(E_i)-N(E_k))\delta\left(\omega+\frac{1}{\hbar}(E_i-E_k)\right)$$
$$=\frac{c}{4\pi^2\hbar^3}m^2gn_0(2g\hbar\omega)\beta$$
$$\times\int_0^\infty dz\left(1-\frac{1}{2u(z)}-\frac{1}{2u(z)^2}\right)^2(e^{\frac{z}{2\tau}}-e^{-\frac{z}{2\tau}})^{-2}$$
$$=\frac{c}{4\pi^2\hbar^3}m^2gn_0(2g\hbar\omega)\beta\tau^2\frac{3}{16}\pi$$
$$=\frac{\hbar\omega}{\pi}(n_0a^3)^{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}\pi^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\beta gn_0} \tag{4.136}$$

となる。ここで $\tau=(\beta gn_0)^{-1}$, $g=(4\pi a\hbar^2/m)$, $c=(gn_0/m)^{\frac{1}{2}}$ を使った。この結果を（4.122）へ代入すると，

$$\frac{\Gamma_{22}}{\omega}=\frac{(-2)}{\frac{2}{N_0}\int dXX_1^2\tilde{n}_0}\Bigg[\frac{1}{N_0}\int dXX_1^2\left(X_1\frac{\partial}{\partial X_1}\tilde{n}_0\right.$$
$$\left.-X_2\frac{\partial}{\partial X_2}\tilde{n}_0\right)$$
$$\times(n_0a^3)^{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}\pi^{\frac{3}{2}}\frac{k_\beta T}{gn_0}\Bigg] \tag{4.137}$$

となる。以上の計算で ω_2 モード振動の減衰割合を求めることができた。同様な計算によりモード周波数，さらには他の低エネルギー集団励起についてもモード周波数，減衰割合を求めることができる。

第5章　結　　論

本論文ではトラップポテンシャル中のボーズ凝縮体に対する低エネルギー集団励起のモード周波数と減衰割合を求めた。前の論文[15]との相違点は凝縮体と熱的励起準粒子集団の密度の空間依存性を含んだモード周波数と減衰割合の微視的表現を得た点にある。このことにより様々なトラップ形状でのモード周波数と減衰割合を求めることができ，Hartree-Fock-Bogoliubov-Popov 理論の範囲で実験結果との比較検討が可能となった。

第2章では絶対零度での低エネルギー集団励起のモード周波数を求めた。ボーズ凝縮体の波動関数に対する GP 方程式より波動関数の定常値を求め，凝縮体密度 $n_0(x)$ を得た。定常値からの偏差が小さいとし，凝縮体の密度と速度ポテンシャルの運動方程式を導いた。両式を結合することにより，凝縮体の密度のみに対する運動方程式を得た。最

初にトラップポテンシャルが等方的な場合を考え，固有モード関数と固有モード周波数を得，固有モード関数は全角運動量量子数 ℓ とトラップ対称軸上に写影した角運動量量子数 m によって分類されることを示した。次にトラップポテンシャルが軸対称な場合を考え，低エネルギー集団励起のモード周波数を導いた。

第3章では第2章と同じ絶対零度での低エネルギー集団励起のモード周波数を凝縮体の広がり幅に対するスケールパラメータ b_i を導入して求めた。b_i に対する運動方程式を求め，線形近似を行い，平衡点のまわりの微小振動のモード周波数を得た。トラップポテンシャルが軸対称である場合，低エネルギー集団励起は半径方向のみの振動モード $(\ell=2,\ |m|=2)$，半径方向と軸方向が同位相および反位相で振動する2つの振動モード（ともに $m=0$）の3種類の振動モードが存在することを示し，第2章と同じ結果がスケールパラメータの方法で導かれることが分かった。

第4章では第3章の議論を有限温度に拡張し，熱的励起準粒子集団の存在を考慮に入れて，低エネルギー集団励起のモード周波数と減衰割合を求めた。最初に凝縮体の波動関数の定常値に対する式と定常値からの偏差に対する式を線形近似のもとで求めた。凝縮体の定常値からの偏差が準粒子集団の統計分布に影響を与え，その反作用として凝縮体の運動に対する影響を調べ，準粒子集団の動的効果を考慮した式を導いた。この結果より，凝縮体の密度と速度ポテンシャルの運動方程式を得た。これは第2章で求めた結果の有限温度への拡張である。準粒子集団に対してはHartree-Fock-Bogoliubov理論を使い，Popov近似で展開し，準粒子のエネルギー，波動関数を求めた。準粒子集団の動的効果を考える上で重要な役割を果たす相関関数を準粒子の波動関数を使って表現した。次に第3章のスケールパラメータの方法に従い，低エネルギー集団励起のモード周波数と減衰割合を求めた。トラップポテンシャルの形状を示すパタメータ λ を明白に含んだ形でモード周波数と減衰割合を求めた点が今回の論文の新しい点である。この結果，理論と実験結果との比較検討が可能となった。一例として ω_2 モード振動に対するモード周波数と減衰割合の計算を行い，減衰割合が温度とともに増加することを示した。

Ketterleらのレビュー[18]はモード周波数と減衰割合の温度依存性の問題点を指摘している。モード周波数の温度依存性は凝縮体密度が温度上昇とともに減少すること，熱的に準粒子が励起されることによるが，現在の理論は実験結果を十分に説明できない。トラップポテンシャルと熱的励起準粒子集団による平均場ポテンシャルの和からなる有効ポテンシャル中での凝縮体の変形振動を考えると，観測されたモード周波数の温度依存性，つまり温度上昇による $m=2$ の四重極振動の低周波数側シフトと $m=0$ 振動の高周波数側シフトの両方を同時には説明しない。一方，減衰割合は温度とともに上昇するが，この減衰割合の温度依存性は熱的励起準粒子集団が凝縮体の振動に影響を与えるとし，Fedichev[19]のようにLandau減衰機構により実験結果を説明できる。このLandau減衰による効果は絶対温度で消えるが，低エネルギー集団励起の減衰は絶対零度近傍においても消えず，実験で観測されている。この減衰機構として，Beliaev減衰，デフェイジング，モード間の非線形相互作用などが提案されている。

序論においてトラップボーズ原子気体と液体Heを比較して，非一様性と一様性，気体と液体をその相違点としてあげたが，Feshbach共鳴を用いることにより，トラップボーズ原子気体の原子間相互作用を自由に変えることができる[20]。相互作用を強くしたとき，この系自体そして集団励起がどのように変化していくかは今後の興味深い課題である。トラップボーズ凝縮体の集団励起の研究は詳細な理論と実験の比較検討を必要とするとともに，マクロな量子系の多様なふるまいの研究に対して重要な情報を提供している。

参考文献

1）M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Mattews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995)

2) C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995)

3) K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N. J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995)

4) D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Mattews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 420 (1996)

5) M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Drute, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.C. Townsend, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **77**, 988 (1996)

6) D.S. Jin, M.R. Matthews, J.R. Ensher, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **78**, 764 (1997)

7) O.M. Maragò, S.A. Hopkins, J. Arlt, E. Hodby, G. Hechenblaikner, and C.J. Foot, Phys. Rev. Lett. **84**, 2056 (2000)

8) O. Maragò, G. Hechenblaikner, F. Hodby, and C. Foot. Phys. Rev. Lett. **86**, 3938 (2001)

9) F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch, K.W. Madison, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **88**, 250402-1 (2002)

10) C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, 2002)

11) Yu. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. **A 54**, R1753 (1996)
Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996)

12) M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Applied Science, **38**, 185 (1998)

13) M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Applied Science, **40**, 225 (2000)

14) M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Applied Science, **39**, 161 (1999)

15) M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Applied Science, **42**, 109 (2001)

16) M. Ichiyanagi and M. Ohya, Physica, **121 A**, 315 (1983)

17) V.N. Popov, *Functional Integrals and Collective Modes* (Cambridge University Press. 1987)

18) W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn, in *Proceedings of the International School of Physics 《Enrico Fermi》 Course CXL Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases* M. Inguscio, S. Stringari and C.E. Wieman, eds. (IOS Press, 1999), p.67

19) P.O. Fedichev, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **80**, 2269 (1998)

20) S. Inoue, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn and W. Ketterle, Nature, **392**, 151 (1998)