Hilbert 空間内の正定作用素の分数べきに関する一考察

日 當 明 男*

A Note on Fractional Powers of Positive Operators in Hilbert Spaces

Haruo HINATA*

In [4], Inaba & Hinata discussed a mathematical model for general boundary input systems. In that paper , the concept of fractional powers of positive operators played an important role, and it enabled us to derive distributed input systems equivalent with a general boundary input system. In this paper, we will investigate several properties of fractional powers in more details and consider about fractional powers of perturbed positive operators.

1．はじめに

Inaba & Hinata は［4］において，一般境界入力システムの数学モデルについて考察した。そこでは，いくつかの数学的概念が用いられたが，中でも正定作用素の分数べきは重要な役割を演じていた。この概念を用いることによって，一般境界入力システムの解の滑らかさや，拡大された状態空間を持つ等価な分布入力システムを導くことができた。また［4］では，一般境界入力システムの逆問題やフィードバック特性についても考察した。そこでは証明は省略されたが，より詳しい分数べきの性質や正定作用素の摂動についての概念を用いていた。

境界入力システムの分布入力システムとしての表現については，Salamon ［9］も議論しているが，彼は作用素の分数べきを用いていない。これは彼のモデルが，分数べきが現れない［4］の特別な場合に相当していたからである。境界入力システムをより厳密に解析するためには，分数べきの利用はさけて通れないであろう。また Salamon ［9］は C_0-半群で表現されるシステムを対象としていたが，［4］では解析的半群に制限していた。今後は［4］の内容を C_0-半群にまで広げる。そのためには［4］で用いた数学的概念を，解析的半群のような制限を加えずに整理しておくことが必要となる。本稿では，基礎的な概念をまとめ，またいくつかの命題や定理には証明をつける。それらは数学の分野ではあまり検討されてはいないようだが，我々の立場では非常に有用である。

2節では，正定作用素の分数べきを定義しその性質を明らかにする。特に負べきは従来の定義の拡張となっているので，指数法則等の諸性質を証明する。3節では正定作用素の摂動について考察し，作用素の正定性はあるクラスの非有界摂動の下で不変であることを示す。さらに，それぞれの分数べきの定義域が Hilbert 空間として同等になることも示す。4節では半群の生成作用素と正定作用素との関係が考察される。最後に5節で境界入力システムの解析の中での本稿の位置づけと，今後の方向について述べる。

情報制御工学コース講師
1995年11月29日受付

2．正定作用素の分数べきとその拡張

$\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$を実 Hilbert 空間とし，それぞれの内積を$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{X}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{Y}}$とする。2つの Hilbert 空間$\mathscr{X}$と$\mathscr{Y}$が同等であるとは，$\mathscr{X}$と$\mathscr{Y}$が集合として等しく，内積$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{X}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{Y}}$から誘導されるそれぞれのノルム$\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$が同等であるときをいう。$\mathscr{X}$から$\mathscr{Y}$への有界線形作用素のつくる Banach 空間を$\mathscr{B}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$と表し，$\mathscr{B}(\mathscr{X};\mathscr{X})$は単に$\mathscr{B}(\mathscr{X})$と書く。線形作用素$A$の定義域，値域および零空間はそれぞれ$\mathscr{D}(A)$，$\mathscr{R}(A)$および$\mathscr{N}(A)$と表す。さらに$A$のレゾルベント集合を$\rho(A)$とする。また$\mathscr{X}'$を$\mathscr{X}$の双対空間$\mathscr{B}(\mathscr{X};\boldsymbol{R})$とし，$\mathscr{X}'$が$\mathscr{X}$と同一視されるとき，$\mathscr{X}$は**ピボット空間**と呼ばれる。

$A\in\mathscr{B}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$に対して，転置作用素$A'\in\mathscr{B}(\mathscr{Y}';\mathscr{X}')$を

$$(A'f)(x):=f(Ax),\ x\in\mathscr{X},\ y\in\mathscr{Y}$$

と定義する。また，$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{Y}$ が$\mathscr{X}$で稠密に定義された線形作用素である時，Aの共役作用素 $A^*:(\mathscr{D}(A^*)\subset\mathscr{Y})\to\mathscr{X}$ は

$$\langle x, A^*y\rangle_{\mathscr{X}}:=\langle Ax, y\rangle_{\mathscr{Y}},\qquad x\in\mathscr{D}(A),\ y\in\mathscr{D}(A^*)$$

と定義される。ここで，$\mathscr{D}(A^*)$は任意の $x\in\mathscr{D}(A)$ に対して $\langle x, z\rangle_{\mathscr{X}}=\langle Ax, y\rangle_{\mathscr{Y}}$ を満たす $z\in\mathscr{X}$ が存在するような $y\in\mathscr{Y}$ 全体である。今，$A\in\mathscr{B}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$のとき，$A^*\in\mathscr{B}(\mathscr{Y};\mathscr{X})$となり，さらに$\mathscr{X}$と$\mathscr{Y}$がともにピボット空間ならば，$A^*=A'$となることに注意する。次は本稿の基礎となる重要な命題ではあるが，その証明は容易なので省略する。

(2.1) 命題　$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$を稠密に定義された閉線形作用素とし，$0\in\rho(A)$ が満たされるとする。このとき次が成り立つ。

(i) Aの定義域$\mathscr{D}(A)$は内積を

$$\langle x, y\rangle_{\mathscr{D}(A)}:=\langle Ax, Ay\rangle_{\mathscr{X}},\quad x, y\in\mathscr{D}(A)$$

のように定義すると，Hilbert 空間となる。このときAは$\mathscr{D}(A)$から$\mathscr{X}$への位相同型作用素となる。実際Aは等距離作用素である。

(ii) Aの共役作用素$A^*:(\mathscr{D}(A^*)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$，転置作用素$A':(\mathscr{X}'\subset\mathscr{D}'(A))\to\mathscr{D}'(A)$はともに稠密に定義された閉作用素で，それぞれ$0\in\rho(A^*)$，$0\in\rho(A')$を満たす。ここで，$\mathscr{D}'(A)$は Hilbert 空間$\mathscr{D}(A)$の双対空間を意味する。

(iii) $\mathscr{X}$をピボット空間とするとき，A^*の転置作用素$(A^*)':\mathscr{X}\to\mathscr{D}'(A^*)$は，$A$の$\mathscr{X}$全体への線形位相同型作用素としての一意な拡張となり，A_0と表される。また$\mathscr{D}'(A^*)$上の内積を

$$\langle A_0^{-1}x, A_0^{-1}y\rangle_{\mathscr{X}},\quad x, y\in\mathscr{D}'(A^*)$$

と定義すると，これは双対空間$\mathscr{D}'(A^*)$上の固有の内積と同等になる。 □

線形作用素 $A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ を**正定作用素**とする。すなわち，A は$[0,\infty)\in\rho(-A)$を満たす稠密に定義された閉線形作用素であり，

$$\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\leq M,\quad \forall\lambda\in[0,\infty)$$

を満たす$M>0$が存在する。このとき，各$\alpha>0$に対して，Aの分数べきA^{α}は次のように定義される[5, 6, 11]。

(2.2) 定義　$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$を正定作用素とし，実数$\alpha>0$および$m>\alpha$なる整数$m$を取る。このとき$A$の**(正の)分数べき**$A^{\alpha}:(\mathscr{D}(A^{\alpha})\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$は次のように定義される。

$$A^{\alpha}x:=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}\int_0^{\infty}\mu^{\alpha-1}\{A(\lambda I+A)^{-1}\}^m x\,d\mu,\qquad x\in\mathscr{D}(A^{\alpha}).$$

ここで，$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数であり，定義域$\mathscr{D}(A^{\alpha})$は上式の右辺の積分が$\mathscr{X}$で存在するようなすべての $x\in\mathscr{X}$ からなる。すなわち

$$\mathscr{D}(A^{\alpha}):=\left\{x\in\mathscr{X};\int_0^{\infty}\mu^{\alpha-1}\|\{A(\lambda I+A)^{-1}\}^m x\|_{\mathscr{X}}\,d\mu<\infty\right\}.$$

□

(2.3) 注意　A^{α}の定義は$m>\alpha$なる整数mの取り方に依存しない[5, 6, 11]。また，A^0は$\mathscr{X}$上の恒等作用素Iとして定義される。さらに，$\alpha\in(0,1)$のとき，定義(2.2)で与えられるA^{α}は次のようにも表現される[10]。

$$A^{\alpha}x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\mu^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\,d\mu,$$

$x\in\mathscr{D}(A^\alpha)$. □

よく知られているように，$\alpha>0$ に対する分数べきA^αは$\mathscr{X}$で稠密に定義された閉作用素であり，$0\in\rho(A^\alpha)$を満たす。従って，命題(2.1)-(i)より，定義域$\mathscr{D}(A^\alpha)$は内積を

$$\langle x, y\rangle_{\mathscr{D}(A^\alpha)}:=\langle A^\alpha x, A^\alpha y\rangle_{\mathscr{X}},\quad x, y\in\mathscr{D}(A^\alpha)$$

のように定義したとき Hilbert 空間となり，A^αは Hilbert 空間$\mathscr{D}(A^\alpha)$から$\mathscr{X}$への線形位相同型作用素となる。さらに，$\mathscr{X}=\mathscr{D}(A^0)$をピボット空間とするとき，命題(2.1)-(iii)よりA^αは$\mathscr{X}$への一意な位相同型拡張$(A^\alpha)_0$を持つ。この位相同型拡張$(A^\alpha)_0$を用いて，正定作用素Aの負べきを定義する[4]。

(2.4) 定義 $A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$を正定作用素とし，$\alpha>0$ をとり，$\mathscr{X}$をピボット空間とする。このときAの**(負の)分数べき**$A^{-\alpha}$: $\mathscr{D}(A^{-\alpha})\to\mathscr{X}$を次のように定義する。

$$A^{-\alpha}x:=\{(A^\alpha)_0\}^{-1}x,$$
$$x\in\mathscr{D}(A^{-\alpha}):=\mathscr{D}'((A^\alpha)^*)\supset\mathscr{X}.\quad \square$$

ここで，(2.4)で定義される負べき$A^{-\alpha}$が，対応する正べきA^αの逆作用素$(A^\alpha)^{-1}$: $\mathscr{X}\to\mathscr{D}(A^\alpha)$の一意な拡張 : $\mathscr{D}(A^{-\alpha})\to\mathscr{X}$であることは容易に分かる。このような正定作用素の分数べきに関して，次の命題が成り立つ。この命題は命題(2.1)や定義(2.4)を用いて容易に示せるので［5,6,11］，ここではその証明を省略する。

(2.5) 命題 $\mathscr{X}$をピボット空間，A: $(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$を正定作用素，$\alpha, \beta\in\boldsymbol{R}, \lambda>0$ とする。このとき次が成り立つ。

(i) A^αの定義域$\mathscr{D}(A^\alpha)$は内積を

$$\langle x, y\rangle_{\mathscr{D}(A^\alpha)}:=\langle A^\alpha x, A^\alpha y\rangle_{\mathscr{X}},\quad x, y\in\mathscr{D}(A^\alpha)$$

のように定義すると，Hilbert 空間となる。このときA^αは$\mathscr{D}(A^\alpha)$から$\mathscr{X}$への位相同型作用素となる。実際A^αは等距離作用素である。

(ii) 作用素$\lambda I+A$もまた正定作用素となり，定義域$\mathscr{D}((\lambda I+A)^\alpha)$は$\mathscr{D}(A^\alpha)$と Hilbert 空間として同等となる。

(iii) $\alpha,\beta\geq 0$とする。このとき合成作用素$A^\alpha A^\beta$は$\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$から$\mathscr{X}$への線形位相同型作用素となり，次を満たす。

$$A^\alpha A^\beta x=A^{\alpha+\beta}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta}).$$

(iv) $\alpha>\beta$とするとき，$\mathscr{D}(A^\alpha)$は$\mathscr{D}(A^\beta)$の中に稠密にかつ連続的に埋め込まれる。すなわち，$\mathscr{D}(A^\alpha)$は$\mathscr{D}(A^\beta)$の中で稠密であり，次を満たす定数$d_{\alpha-\beta}$が存在する。

$$\|x\|_{\mathscr{D}(A^\beta)}\leq d_{\alpha-\beta}\|x\|_{\mathscr{D}(A^\alpha)},\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^\alpha).$$

また，A^βの$\mathscr{D}(A^\alpha)$への制限$(A^\beta)_\alpha$は

$$(A^\beta)_\alpha x=(A^{\alpha-\beta})^{-1}A^\beta A^{\alpha-\beta}x\qquad \forall x\in\mathscr{D}(A^\alpha)\subset\mathscr{D}(A^\beta)$$

を満たし，$\mathscr{D}(A^\alpha)$から$\mathscr{D}(A^{\alpha-\beta})$への線形位相同型作用素となる。特に $\beta>0$ のとき，$(A^\beta)_\alpha$: $(\mathscr{D}(A^\alpha)\subset\mathscr{D}(A^{\alpha-\beta}))\to\mathscr{D}(A^{\alpha-\beta})$は閉作用素となり，$0\in\rho((A^\beta)_\alpha)$ を満たす。 □

上の命題を用いて，次の命題が示される。

(2.6) 命題 $\mathscr{X}$をピボット空間，A: $(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$を正定作用素，$\alpha, \beta\in\boldsymbol{R}$とする。このとき次が成り立つ。

(i) 合成作用素$A^\alpha A^\beta$は$\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta):=\mathscr{D}(A^\beta)\cap\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$上の線形位相同型作用素となり，

$$A^\alpha A^\beta x=A^{\alpha+\beta}x,\qquad \forall x\in\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta)=\mathscr{D}(A^\theta)\quad (1)$$

を満たす。ここで，$\theta=\max(\beta, \alpha+\beta)$である。

(ii) $\alpha>\beta$とする。このとき線形位相同型作用素A^α:$\mathscr{D}(A^\alpha)\to\mathscr{X}$は$\mathscr{D}(A^\beta)$上への位相同型作用素としての一意な拡張$(A^\alpha)_\beta$: $\mathscr{D}(A^\beta)\to\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$を持ち，それは次のように与えられる。

$$(A^\alpha)_\beta x=\begin{cases}(A^{\beta-\alpha})^{-1}A^\alpha A^{\beta-\alpha}x & (\alpha\geq 0)\\ (A^\beta)^{-1}A^\alpha A^\beta x & (\alpha<0)\end{cases}\qquad \forall x\in\mathscr{D}(A^\beta)\quad (2)$$

(iii) 作用素 $A_{\beta+1}:=(A^\beta)^{-1}AA^\beta$:$(\mathscr{D}(A^{\beta+1})\subset\mathscr{D}(A^\beta))\to\mathscr{D}(A^\beta)$は$\mathscr{D}(A^\beta)$内の正定作用素である。ここで $\alpha\geq 0$とするとき，$\mathscr{D}((A_{\beta+1})^\alpha)$は$\mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})$と Hilbert 空間として同等であり，次を満たす。

$$(A_{\beta+1})^\alpha x=(A^\beta)^{-1}A^\alpha A^\beta x=(A^\beta)^{-1}A^{\beta+\alpha}x,$$

$\forall x \in \mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})$

さらに$\mathscr{D}((A_{\beta+1})^0)=\mathscr{D}(A^\beta)$をピボット空間とみなすとき，$\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{-\alpha})$は Hilbert 空間として$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$と同等であり，

$$(A_{\beta+1})^{-\alpha}x=(A^\beta)^{-1}A^{-\alpha}(A^\beta)_{\beta-\alpha}x$$
$$=(A^\beta)^{-1}A^{\beta-\alpha}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$$

を満たす。

［証明］　(i)$\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$の時は命題(2.5)-(iii)と同じなので，$\alpha<0$または$\beta<0$の時を示す。

まず$\alpha\geq 0, \beta<0$の時，$\alpha+\beta=\max(\beta, \alpha+\beta)$なので$\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})\subset\mathscr{D}(A^\beta)$となり，$\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta)=\mathscr{D}(A^\beta)\cap\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})=\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$となる。また命題(2.5)-(iii)より，$A^\beta$は$\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$から$\mathscr{D}(A^\alpha)$への線形位相同型作用素なので，$A^\alpha A^\beta$は$\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$から$\mathscr{X}$への線形位相同型作用素となる。

いま$\gamma:=-\beta>0$とし，$\alpha\geq\gamma$とする。すなわち，$\alpha+\beta=\alpha-\gamma\geq 0$とする。このとき命題(2.5)-(iii)より

$$A^\alpha y=A^{\alpha-\gamma}A^\gamma y,\quad \forall y\in\mathscr{D}(A^\alpha)$$

が成り立つ。また$\alpha\geq\gamma$であり，命題(2.5)-(iii)より，A^γは$\mathscr{D}(A^\alpha)$から$\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma})$への位相同型作用素となるので，上式において$x=A^\gamma y\in\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma})$とすると，

$$A^\alpha(A^\gamma)^{-1}x=A^{\alpha-\gamma}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma})$$

となる。さらに$(A^\gamma)^{-1}$が$\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma})\subset\mathscr{D}$上では$A^{-\gamma}$に一致することに注意すると，

$$A^\alpha A^{-\gamma}x=A^{\alpha-\gamma}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma})\subset\mathscr{X} \tag{3}$$

が成り立つことが分かる。

次に$\alpha<\gamma$のとき，$\alpha+\beta=\alpha-\gamma<0$となり，命題(2.5)-(iv)より次が成り立つ。

$$A^\gamma y=A^{\gamma-\alpha}A^\alpha y,\quad \forall y\in\mathscr{D}(A^\gamma)$$

ここで，A^αは$\mathscr{D}(A^\gamma)$から$\mathscr{D}(A^{\gamma-\alpha})$への位相同型作用素となるので，$x=A^\alpha y\in\mathscr{D}(A^{\gamma-\alpha})$とすると，

$$A^\gamma(A^\alpha)^{-1}x=A^{\gamma-\alpha}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\gamma-\alpha})$$

となる。従って，

$$A^\alpha(A^\gamma)^{-1}x=\{A^\gamma(A^\alpha)^{-1}\}^{-1}x=(A^{\gamma-\alpha})^{-1}x,\quad \forall x\in\mathscr{X}$$

が成り立つ。ここで，$\mathscr{X}$が$\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma})$で稠密であり，$(A^\gamma)^{-1}$と$(A^{\gamma-\alpha})^{-1}$の$\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma})$への連続的拡張がそれぞれ$A^{-\gamma}$と$A^{\alpha-\gamma}$と一致することに注意すると，

$$A^\alpha A^{-\gamma}x=A^{\alpha-\gamma}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\alpha-\gamma}) \tag{4}$$

が得られ，(3)と(4)より$\alpha\geq 0, \beta<0$に対する(1)が示される。

次に$\alpha<0, \beta\geq 0$とする。このとき，$\beta=\max(\beta, \alpha+\beta)$なので$\mathscr{D}(A^\beta)\subset\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$となり，$\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta)=\mathscr{D}(A^\beta)\cap\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})=\mathscr{D}(A^\beta)$となる。また命題(2.5)-(iv)より，$A^\alpha$は$\mathscr{X}$から$\mathscr{D}(A^{-\alpha})$への線形位相同型作用素なので，$A^\alpha A^\beta$は$\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta)=\mathscr{D}(A^\beta)$から$\mathscr{D}(A^{-\alpha})\subset\mathscr{X}$への線形位相同型作用素となる。

今，$\gamma:=-\alpha>0$とし，$\beta\geq\gamma$とする。すなわち，$\alpha+\beta=\beta-\gamma\geq 0$とする。このとき命題(2.5)-(iii)より

$$A^\beta x=A^\gamma A^{\beta-\gamma}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^\beta)$$

が成り立つ。ここで$A^{-\gamma}$が$(A^\gamma)^{-1}$の$\mathscr{D}(A^{-\gamma})(\supset\mathscr{X})$への拡張なので，次が得られる。

$$A^{-\gamma}A^\beta x=(A^\gamma)^{-1}A^\beta x=A^{\beta-\gamma}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^\beta). \tag{5}$$

次に$\beta<\gamma$のとき，$\alpha+\beta=\beta-\gamma<0$となり，命題(2.5)-(iii)より次が成り立つ。

$$A^\beta A^{\gamma-\beta}x=A^\gamma x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^\gamma)$$

すなわち，

$$A^{\gamma-\beta}x=(A^\beta)^{-1}A^\gamma x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^\gamma).$$

ここで$(A^\beta)^{-1}A^\gamma$が$\mathscr{D}(A^\gamma)$から$\mathscr{D}(A^\beta)$への位相同型作用素であり，$A^{-\gamma}$と$A^{\beta-\gamma}$は$\mathscr{D}(A^\beta)\subset\mathscr{X}$上では，それぞれ$(A^\gamma)^{-1}$と$(A^{\gamma-\beta})^{-1}$に一致するので

$$A^{-\gamma}A^\beta x=\{(A^\beta)^{-1}A^\gamma\}^{-1}x=(A^{\gamma-\beta})^{-1}x=A^{\beta-\gamma}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^\beta) \tag{6}$$

が成り立つ。従って，(5)と(6)より$\alpha<0, \beta\geq 0$に対する(1)が示される。

最後に，$\alpha<0, \beta<0$とする。このとき，$\beta=\max(\beta, \alpha+\beta)$なので，$\mathscr{D}(A^\beta)\subset\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$となり，$\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta)=\mathscr{D}(A^\beta)\cap\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})=\mathscr{D}(A^\beta)$となる。また$A^\beta$は$\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta)=\mathscr{D}(A^\beta)$から$\mathscr{X}$への線形位相同型作用素なので，$A^\alpha A^\beta$は$\mathscr{D}(A^\alpha A^\beta)=\mathscr{D}(A^\beta)$から$\mathscr{D}(A^{-\alpha})$への線形位相同型作用素となる。

いま$\gamma:=-\alpha>0, \delta:=-\beta>0$とすると，命題(2.5)-(iii)より，

$$A^\delta A^\gamma x=A^{\gamma+\delta}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\gamma+\delta})$$

となり，

$$(A^{\gamma+\delta})^{-1}x=(A^\gamma)^{-1}(A^\delta)^{-1}x,\quad \forall x\in\mathscr{X}$$

となる。ここで$\mathscr{X}$が$\mathscr{D}(A^{-\delta})$で稠密であり，$(A^{\gamma})^{-1}(A^{\delta})^{-1}$と$(A^{\gamma+\delta})^{-1}$の$\mathscr{D}(A^{-\delta})$への連続的拡張がそれぞれ$A^{-\gamma}A^{-\delta}$と$A^{-\gamma-\delta}$となることに注意すると，

$$A^{-\gamma}A^{-\delta}x=A^{-\gamma-\delta}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{-\gamma})$$

が得られ，(1)が示される。

(ii) $\alpha>\beta$とする。このとき命題(2.5)-(iv)より，$\mathscr{D}(A^{\alpha})$が$\mathscr{D}(A^{\beta})$で稠密なので，A^{α}の$\mathscr{D}(A^{\beta})$への位相同型としての拡張$(A^{\alpha})_{\beta}$が一意となることは容易にわかる。

まず，$\alpha\geq 0$に対する(2)を考える。(i)と命題(2.5)-(iii)より，$A^{\alpha}A^{\beta-\alpha}$が$\mathscr{D}(A^{\alpha}A^{\beta-\alpha})=\mathscr{D}(A^{\beta})$から$\mathscr{X}$への線形位相同型作用素となり，また$(A^{\beta-\alpha})^{-1}$も$\mathscr{X}$から$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$への位相同型作用素なので，合成作用素$(A^{\beta-\alpha})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta-\alpha}$もまた$\mathscr{D}(A^{\beta})$から$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$への位相同型作用素となる。一方，$A^{\alpha}$と$A^{\beta-\alpha}$は$\mathscr{D}(A^{\alpha})\subset\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$上では可換なので，

$$(A^{\beta-\alpha})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta-\alpha}x=(A^{\beta-\alpha})^{-1}A^{\beta-\alpha}A^{\alpha}x=A^{\alpha}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\alpha})$$

が成り立ち，位相同型作用素$(A^{\beta-\alpha})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta-\alpha}$が$A^{\alpha}$の$\mathscr{D}(A^{\beta})$への拡張であることが分かる。従って，$(A^{\alpha})_{\beta}$と$(A^{\beta-\alpha})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta-\alpha}$は一致する。

次に$\alpha<0$とする。このとき，(i)より$A^{\alpha}A^{\beta}$が$\mathscr{D}(A^{\alpha}A^{\beta})=\mathscr{D}(A^{\beta})$から$\mathscr{D}(A^{-\alpha})$への線形位相同型作用素となり，また命題(2.5)-(iv)より$(A^{\beta})^{-1}$も$\mathscr{D}(A^{-\alpha})\subset\mathscr{X}$から$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$への位相同型作用素なので，合成作用素$(A^{\beta})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta}$もまた$\mathscr{D}(A^{\beta})$から$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$への位相同型作用素となる。一方，$A^{\alpha}$と$A^{\beta}$は$\mathscr{D}(A^{\alpha})\subset\mathscr{D}(A^{\beta})$上では可換なので，

$$(A^{\beta})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta}x=(A^{\beta})^{-1}A^{\beta}A^{\alpha}x=A^{\alpha}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(A^{\alpha})$$

が成り立ち，位相同型作用素$(A^{\beta})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta}$が$A^{\alpha}$の$\mathscr{D}(A^{\beta})$への拡張であることが分かる。従って，$(A^{\beta})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta}$は$(A^{\alpha})_{\beta}$と一致する。

(iii) まず(i)と命題(2.5)-(iv)を用いると，$(A^{\beta})^{-1}AA^{\beta}$が$\mathscr{D}(A^{\beta+1})$上で$(A^{\beta})^{-1}A^{\beta+1}$に一致し，$A^{\beta+1}:(\mathscr{D}(A^{\beta+1})\subset\mathscr{D}(A^{\beta}))\to\mathscr{D}(A^{\beta})$が正定作用素となることが分かる。

$\alpha=0$に対しては，明らかに(iii)は成り立つので，$\alpha>0$とする。このとき，

$$A_{\beta+1}(\lambda I+A_{\beta+1})^{-1}x=(A^{\beta})^{-1}\{A(\lambda I+A)^{-1}\}A^{\beta}x,\quad \forall\lambda\geq 0,\ x\in\mathscr{D}(A^{\beta})\tag{7}$$

となることに注意すると，定義(2.2)と命題(2.5)-(iv)より

$$x\in\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})\Leftrightarrow A^{\beta}x\in\mathscr{D}(A^{\alpha})\Leftrightarrow x\in\mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})$$

となり，$\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})$は$\mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})$と集合として等しいことが分かる。また(7)，(i)および定義(2.2)より

$$(A_{\beta+1})^{\alpha}x=(A^{\beta})^{-1}A^{\alpha}A^{\beta}x=(A^{\beta})^{-1}A^{\beta+\alpha}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})=\mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})\tag{8}$$

となるので，$(A_{\beta+1})^{\alpha}$の定義域$\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})\subset\mathscr{D}(A^{\beta})$は内積を

$$\langle x,y\rangle_{\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})}:=\langle(A_{\beta+1})^{\alpha}x,(A_{\beta+1})^{\alpha}y\rangle_{\mathscr{D}(A^{\beta})},\quad \forall x,y\in\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})$$

のように定義するとHilbert空間となる。さらに

$$\|x\|_{\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})}=\|(A_{\beta+1})^{\alpha}x\|_{\mathscr{D}(A^{\beta})}=\|(A^{\beta})^{-1}A^{\beta+\alpha}x\|_{\mathscr{D}(A^{\beta})}=\|A^{\beta+\alpha}x\|_{\mathscr{X}}=\|x\|_{\mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})},\quad \forall x\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})=\mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})$$

より，$\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})$は$\mathscr{D}(A^{\beta+\alpha})$とHilbert空間として同等になることが分かる。

次に$\mathscr{X}_{\beta+1}:=\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{0})=\mathscr{D}(A^{\beta})$をピボット空間とする。このとき，$A_{\beta+1}$の負べき$(A_{\beta+1})^{-\alpha}$を定義するためには，定義(2.4)より位相同型作用素$(A_{\beta+1})^{\alpha}:\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{\alpha})\to\mathscr{X}_{\beta+1}$を$\mathscr{X}_{\beta+1}$上へ位相同型作用素として拡張しなければならない。

いま$(A^{-\alpha})^{-1}$がA^{α}の$\mathscr{X}$への位相同型作用素としての拡張であることに注意すると，合成作用素$(A^{-\alpha})^{-1}A^{\beta}$が$\mathscr{X}_{\beta+1}=\mathscr{D}(A^{\beta})$から$\mathscr{D}(A^{-\alpha})$への位相同型作用素となる。さらに(ii)より$(A^{\beta})_{\beta-\alpha}$は$A^{\beta}$の位相同型作用素としての拡張:$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})\to\mathscr{D}(A^{-\beta})$なので，合成作用素$\{(A^{\beta})_{\beta-\alpha}\}^{-1}(A^{-\alpha})^{-1}A^{\beta}$は$\mathscr{X}_{\beta+1}$から$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$への位相同型作用素であり，$(A_{\beta+1})^{\alpha}$の$\mathscr{X}_{\beta+1}$への位相同型拡張となっている。それ故に，定義(2.4)より$\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{-\alpha})$は$\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$となり，

$$(A_{\beta+1})^{-\alpha}x=(A^{\beta})^{-1}A^{-\alpha}(A^{\beta})_{\beta-\alpha}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{-\alpha})=\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$$

となる。さらに，(i)と命題(2.5)-(iv)に注意し(ii)を用いると，$A^{-\alpha}(A^{\beta})_{\beta-\alpha}$は$A^{\beta-\alpha}$と一致するので，

$$(A_{\beta+1})^{-\alpha}x=(A^{\beta})^{-1}A^{\beta-\alpha}x,\quad \forall x\in\mathscr{D}((A_{\beta+1})^{-\alpha})=\mathscr{D}(A^{\beta-\alpha})$$

となり，(iii)が示される。これで命題(2.6)が証明された。 □

さらに次の命題も成り立つ。

(2.7) 命題　$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ を正定作用素とし，$\alpha\in[0,1]$ とする。このとき次が成り立つ。

(i)　次を満たす $N_\alpha>0$ が存在する。

$$\|A^\alpha x\|_{\mathscr{X}}\leq N_\alpha\|x\|_{\mathscr{X}}^{1-\alpha}\|Ax\|_{\mathscr{X}}^{\alpha},\quad \forall x\in\mathscr{D}(A).$$

(ii)　$x\in\mathscr{D}(A^\alpha)$ ならば，$\lambda\in[0,\infty)$ の関数 $f_\alpha(\lambda;x):=\|\lambda^\alpha A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}$ が $[0,\infty)$ 上有界である。

(iii) $\alpha\in(0,1)$ とする。$x\in\mathscr{X}$ に対して，(ii)で与えられた関数 $f_{\alpha+\varepsilon}(\cdot;x)$ が $[0,\infty)$ 上有界となるような $\varepsilon\in(0,1-\alpha)$ が存在するならば，$x\in\mathscr{D}(A^\alpha)$ である。

[証明]　(i)　Pazy [10] より容易に示される。

(ii)　$x\in\mathscr{D}(A^\alpha)$ とする。このとき各 $\lambda\in[0,\infty)$ において，A^α と $(\lambda I+A)^{-1}$ は $\mathscr{D}(A^\alpha)$ 上で可換なので，(i)より

$$\begin{aligned}f_\alpha(\lambda;x)&=\|\lambda^\alpha A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}\\&=\|\lambda^\alpha A^{1-\alpha}(\lambda I+A)^{-1}A^\alpha x\|_{\mathscr{X}}\\&\leq\lambda^\alpha N_{1-\alpha}\|(\lambda I+A)^{-1}A^\alpha x\|_{\mathscr{X}}^{\alpha}\\&\qquad\cdot\|A(\lambda I+A)^{-1}A^\alpha x\|_{\mathscr{X}}^{1-\alpha}\\&\leq\lambda^\alpha N_{1-\alpha}\left(\frac{M}{\lambda}\right)^\alpha(1+M)^{1-\alpha}\|Ax\|_{\mathscr{X}}\\&\leq N_{1-\alpha}(1+M)\|Ax\|_{\mathscr{X}},\quad\forall\lambda\in[0,\infty)\end{aligned}$$

となる。ここで，$M>0$ は次を満たす定数である。

$$\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\leq M,\quad\forall\lambda\in[0,\infty).\tag{1}$$

このように(ii)が示される。

(iii)　$x\in\mathscr{X}$，$\varepsilon\in(0,1-\alpha)$ とし，関数 $f_{\alpha+\varepsilon}(\cdot;x)$ が $[0,\infty)$ 上有界であるとする。すなわち，次を満たす2定数 $T>0, L>0$ が存在する。

$$\|\lambda^{\alpha+\varepsilon}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}\leq L,\quad\forall\lambda\geq T$$

故に，

$$\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}\leq L\lambda^{-(1+\varepsilon)},\quad\forall\lambda\geq T$$

が成り立つ。このとき上式より

$$\int_T^\infty\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}d\lambda\leq\int_T^\infty L\lambda^{-(1+\varepsilon)}d\lambda$$

$$=\frac{L}{\varepsilon T^\varepsilon}<\infty\tag{2}$$

が得られる。一方，(1)より

$$\begin{aligned}&\int_0^T\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}d\lambda\\&\leq\int_0^T(M+1)\lambda^{\alpha-1}\|x\|_{\mathscr{X}}d\lambda=\frac{M+1}{\alpha}T^\alpha\|x\|_{\mathscr{X}}<\infty\end{aligned}\tag{3}$$

となるので，(2)，(3)より，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}\,d\lambda\\&\leq\frac{M+1}{\alpha}T^\alpha\|x\|_{\mathscr{X}}+\frac{L}{\varepsilon T^\varepsilon}<\infty\end{aligned}$$

となり，$x\in\mathscr{D}(A^\alpha)$ が示される。これで命題(2.7)が証明された。 □

3．摂動された正定作用素の分数べきの定義域

前節では，正定作用素の分数べきを定義し，それらの性質について考察した。特に負べきの定義に関しては従来の定義の拡張となっていることを示した。また命題(2.6)では，それらの拡張や指数法則について考察した。ここでは正定作用素の摂動とそれらの分数べきの定義域について議論する。

まず，次の命題に注意する。この命題は命題(2.5)-(ii)や［5, 11］を用いて容易に示される。

(3.1) 命題　$\mathscr{X}$ をピボット空間とし，$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ を稠密に定義された閉作用素，$[\nu,\infty)\subset\rho(-A)$ とする。このとき適当な $\omega\geq\nu$ に対して，$\omega I+A$ が正定作用素となるならば，任意の $\mu\geq\nu$ において，$\mu I+A$ が正定作用素となり，各 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対して $\mathscr{D}((\omega I+A)^\alpha)$ は $\mathscr{D}((\mu I+A)^\alpha)$ と Hilbert 空間として同等である。

[証明]　作用素 A が命題の仮定を満たすとき，$\nu-\omega\leq0$ であり，$[\nu-\omega,\infty)\subset\rho(-(\omega I+A))$ となるので，一般性を失うことなく，$\nu\leq0$ とし，正定作用素 A が $[0,\infty)\subset[\nu,\infty)\subset\rho(-A)$ を満たすと仮定してよい。$\nu=0$ の時は命題(2.5)-(ii)より明らかなので，$\nu<0$ とし，$\delta:=-\nu$ とおく。

今 $\mu\geq-\delta$ を任意に取る。$\mu\geq0$ のときは再び命

題(2.5)-(ii)を用いると，命題(3.1)は成り立つ。従って，ここでは $\mu<0$ とし，$\gamma:=-\mu$ とおく。このとき $\nu-\mu=-(\gamma+\delta)<0$ となるので$[0,\infty)\subset[-(\gamma+\delta),\infty)\subset\rho(-(-\gamma I+A))$ が満たされ，$\mathscr{D}(-\gamma I+A)=\mathscr{D}(A)$は$\mathscr{X}$で稠密である。また $\lambda\geq 0$ を任意に取ると，$\lambda\in\rho(-A)$より

$$I-\gamma(\lambda I+A)^{-1}=\{(\lambda-\gamma)I+A\}(\lambda I+A)^{-1}$$

となり，$\lambda-\gamma\in\rho(-A)$に注意すると

$$\{I-\gamma(\lambda I+A)^{-1}\}^{-1}=(\lambda I+A)((\lambda-\gamma)I+A)^{-1}\in\mathscr{B}(\mathscr{X}) \quad (1)$$

となる。すなわち

$$\{\lambda I+(-\gamma I+A)\}^{-1}=(\lambda I+A)^{-1}\{I-\gamma(\lambda I+A)^{-1}\}^{-1} \quad (2)$$

となり，$\lambda\in\rho(-(-\gamma I+A))$となる。

一方Aが正定作用素なので，

$$\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\leq M,\quad \forall\lambda\geq 0 \quad (3)$$

を満たす$M>0$が存在する。また各 $\lambda\in[-\delta,\infty)$ において，$h(\lambda):=\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}$と置くと，$h(\cdot)$ は $[-\delta,\infty)$ 上の連続関数となり，$[-\delta,1]$ 上では最大値を取る。ここで，

$$m_h:=\max\{h(\lambda);\lambda\in[-\delta,1]\}$$

とする。従って，(3)，(4)より

$$h(\lambda)\leq\begin{cases} m_h & (\lambda\in[-\delta,1]) \\ M & (\lambda\in(1,\infty)) \end{cases}$$

が得られる。故に，(2)，(1)，(3)および(5)より

$$\begin{aligned}
&\|\lambda\{\lambda I+(-\gamma I+A)\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\
&=\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\{I-\gamma(\lambda I+A)^{-1}\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\
&\leq\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\|I+\gamma\{(\lambda-\gamma)I+A\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\
&\leq M(1+\gamma\|\{(\lambda-\gamma)I+A\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})})\\
&\leq M(1+\gamma\widehat{M})<\infty
\end{aligned}$$

が導かれる。ここで，$\widehat{M}=\max(m_h,M)$。従って，$\mu I+A=-\gamma I+A$は正定作用素となる。

最後に，$\alpha\in\boldsymbol{R}$を任意に取る。上の議論より$\mu I+A$が正定作用素になるので，命題(2.5)-(ii)において，A,λをそれぞれ $\mu I+A,-\mu$ と置き換えると命題(3.1)が成り立つことが容易に分かる。□

上の命題より，作用素の正定性は恒等作用素の正数倍の摂動の下では不変であり，それらの分数べきの定義域はHilbert空間として同等になることが分かる。

次に正定作用素の非有界摂動について考える。以下の定理は分数べきの指数を $[0,1]$ の間に制限しているが，その結果は我々の目的には充分有用である。

(3.2) 定理　$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$を正定作用素とし，作用素 $K:(\mathscr{D}(K)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$に対して，

$$\mathscr{D}(A^\alpha)\subset\mathscr{D}(K),\quad K\in\mathscr{B}(\mathscr{D}(A^\alpha);\mathscr{X})$$

を満たす $\alpha\in[0,1]$ が存在するとする。このとき，$(\omega I+A+K):(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$が正定作用素となるような $[\omega,\infty)\subset\rho(-A)\cap\rho(-(A+K))$ が存在し，次を満たす。

$$\left.\begin{aligned}&(\mu I+A+K)^{-1}=(\mu I+A)\{I+K(\mu I+A)^{-1}\}^{-1}\\ &\{I+K(\mu I+A)^{-1}\}^{-1}=I-K(\mu I+A+K)^{-1}\end{aligned}\right\}\ \forall\mu\geq\omega.$$

さらに，任意の $\beta\in[0,1]$ において，$\mathscr{D}(A^\beta)$ と $\mathscr{D}((\omega I+A+K)^\beta)$ は Hilbert 空間として同等である。

[証明]　まず，定理の仮定と命題(2.5)-(iv)より$\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(K)$ となり，また命題(2.7)-(i)より次を満たす定数 $M>0$，$L_\alpha>0$ および $N_\alpha>0$ が存在することに注意する。

$$\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\leq M,\qquad \forall\lambda\geq 0 \quad (1)$$

$$\|Kx\|_{\mathscr{X}}\leq L_\alpha\|A^\alpha x\|_{\mathscr{X}},\qquad \forall x\in\mathscr{D}(A^\alpha) \quad (2)$$

$$\|A^\alpha x\|_{\mathscr{X}}\leq N_\alpha\|x\|_{\mathscr{X}}{}^{1-\alpha}\|Ax\|_{\mathscr{X}}{}^{\alpha},\qquad \forall x\in\mathscr{D}(A) \quad (3)$$

ここで，(2)と命題(2.5)-(iv)を用いると，$A+K:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$が閉作用素となることが分かる。また $\lambda>0$ において $K(\lambda I+A)^{-1}\in\mathscr{B}(\mathscr{X})$ となることが次のように示される。

$$\begin{aligned}
&\|K(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}\leq L_\alpha\|A^\alpha(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}\\
&\leq L_\alpha N_\alpha\|(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}{}^{1-\alpha}\|A(\lambda I+A)^{-1}x\|_{\mathscr{X}}{}^{\alpha}\\
&\leq L_\alpha N_\alpha\left(\frac{M}{\lambda}\right)^{1-\alpha}(1+M)^\alpha\|x\|_{\mathscr{X}}\\
&\leq\frac{L_\alpha N_\alpha}{\lambda^{1-\alpha}}(1+M)\|x\|_{\mathscr{X}},\quad \forall x\in\mathscr{X}.
\end{aligned} \quad (4)$$

ここで，$\lambda_0>0$を

$$\lambda_0{}^{1-\alpha}\geq 2L_\alpha N_\alpha(1+M)$$

を満たすように取ると，(4)より，

$$\begin{aligned}
&\|K(\lambda I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\leq\frac{L_\alpha N_\alpha}{\lambda^{1-\alpha}}(1+M)\\
&\leq\frac{L_\alpha N_\alpha}{\lambda_0{}^{1-\alpha}}(1+M)\leq\frac{1}{2}<1,\qquad \forall\lambda\geq\lambda_0
\end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。故に，各 $\lambda \geq \lambda_0$ において，$\{I+K(\lambda I+A)^{-1}\} \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ は可逆であり

$$\{I+K(\lambda I+A)^{-1}\}^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}[-K(\lambda I+A)^{-1}]^k \in \mathscr{B}(\mathscr{X}) \tag{6}$$

$$\|\{I+K(\lambda I+A)^{-1}\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=2 \tag{7}$$

となる。また，(6)と

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{D}(\lambda I+A+K)=\mathscr{D}(A),\\ \lambda I+A+K=\{I+K(\lambda I+A)^{-1}\}(\lambda I+A)\end{array}\right. \quad \forall \lambda \geq \lambda_0$$

より，$[\lambda_0, \infty) \subset \rho(-(A+K))$ かつ

$$\{\lambda I+A+K\}^{-1}=(\lambda I+A)^{-1}\{I+K(\lambda I+A)^{-1}\}^{-1}, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0 \tag{8}$$

が得られる。同様に

$$\begin{aligned}\{I+K(\lambda I+A)^{-1}\}^{-1}&=(\lambda I+A)(\lambda I+A+K)^{-1}\\ &=I-K(\lambda I+A+K)^{-1}, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0\end{aligned} \tag{9}$$

も得られる。

今，$\omega > \lambda_0$ とするとき，作用素 $\omega I+A+K$ は閉作用素となり，その定義域は $\mathscr{D}(A)$ に一致し，$\mathscr{X}$ で稠密である。また $[\lambda_0, \infty) \subset \rho(-(A+K))$ より，$[0, \infty) \subset \rho(-(\omega I+A+K))$ となる。さらに(1),(7)より

$$\begin{aligned}&\|\lambda\{\lambda I+(\omega I+A+K)\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\ &=\|\lambda\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\ &=\|\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\ &\quad\cdot\{I+K((\lambda+\omega)I+A+K)^{-1}\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\ &\leq \frac{\lambda M}{\lambda+\omega}\cdot 2 \leq 2M, \quad \forall \lambda \geq 0\end{aligned}$$

が得られる。故に $\omega I+A+K:(\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{X}) \to \mathscr{X}$ は正定作用素となる。

次に正定作用素 $\omega I+A+K$ の分数べきを考える。ここで，$\mathscr{D}((\omega I+A+K)^0)=\mathscr{X}=\mathscr{D}(A^0)$，$\mathscr{D}((\omega I+A+K)^1)=\mathscr{D}(A^1)$ となり，$\beta=0, 1$ の時の定理は明らかに成り立つので，$\beta \in (0, 1)$ の時について考える。まず任意の $\lambda \geq 0$ において(8)および(9)より，次式が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned}&(\omega I+A+K)\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &=(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &\qquad+K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &=(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\ &\qquad\cdot[I-K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}]\\ &\qquad+K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &=(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}-(\omega I+A)\\ &\qquad\cdot\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &\qquad+K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &=(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\ &\qquad+\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\end{aligned}$$

再び(8)を用いると

$$\begin{aligned}&(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\ &=(\omega I+A+K)\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &\quad-\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &=\{I-\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}K(\omega\ I+A+K)^{-1}\}\\ &\quad\cdot(\omega I+A+K)\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\ &=\{I-\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}K(\omega I+A)^{-1}\\ &\quad\cdot\{I+K(\omega I+A)^{-1}\}^{-1}\}(\omega I+A+K)\\ &\quad\cdot\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\end{aligned} \tag{10}$$

が得られる。ここで $\omega > \lambda_0$ なので(1)，(5)および(7)を用いると

$$\begin{aligned}&\|I-\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}K(\omega I+A)^{-1}\\ &\quad\cdot\{I+K(\omega I+A)^{-1}\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\ &\leq 1+\|\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\|K(\omega I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\ &\quad\cdot\|\{I+K(\omega I+A)^{-1}\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\ &\leq 1+\frac{\lambda}{\lambda+\omega}M\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 \leq 1+M, \quad \forall \lambda \geq 0\end{aligned} \tag{11}$$

となる。故に，上式より，$x \in \mathscr{X}$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\lambda^{\beta-1}\|(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}x\|_{\mathscr{X}}d\lambda\\ &\leq (M+1)\int_0^{\infty}\lambda^{\beta-1}\|(\omega I+A+K)\\ &\qquad\cdot\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}x\|_{\mathscr{X}}d\lambda\end{aligned}$$

となり，$\mathscr{D}((\omega I+A+K)^{\beta}) \subset \mathscr{D}((\omega I+A)^{\beta})$，

$$\|(\omega I+A)^{\beta}x\|_{\mathscr{X}} \leq (M+1)\|(\omega I+A+K)^{\beta}x\|_{\mathscr{X}}, \quad \forall x \in \mathscr{D}((\omega I+A+K)^{\beta})$$

が導かれる。ここで $[0, \infty) \subset \rho(A)$ および命題(3.1)より，$\mathscr{D}(A^{\beta})$ と $\mathscr{D}((\omega I+A)^{\beta})$ は Hilbert 空間として同等なので，

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}((\omega I+A+K)^{\beta}) \subset \mathscr{D}(A^{\beta})\\ &\|x\|_{\mathscr{D}(A^{\beta})} \leq p\|x\|_{\mathscr{D}((\omega I+A+K)^{\beta}))}, \quad \forall x \in \mathscr{D}((\omega I+A+K)^{\beta})\end{aligned} \tag{12}$$

を満たす定数 $p>0$ が存在する。

次に逆の関係を示す。再び(10),(8)および(6)を用い

ると

$$\begin{aligned}&(\omega I+A+K)\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\&=(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\&\quad+\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}K\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}\\&=(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\&\quad+\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\&\quad\cdot\{I+K\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\}^{-1}\\&\quad\cdot K\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\&=[I+\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\&\quad\cdot[I+K\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}]^{-1}K(\omega I+A)^{-1}]\\&\quad\cdot(\omega I+A)\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\end{aligned}$$

が得られる，ここで，(11)と同様に(1)，(5)および(7)を用いると

$$\begin{aligned}&\|I+\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\\&\quad\cdot\{I+K\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\}^{-1}K(\omega I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\&\le 1+\|\lambda\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\&\quad\cdot\|\{I+K((\lambda+\omega)I+A)^{-1}\}^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\&\quad\cdot\|K(\omega I+A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\\&\le 1+\frac{\lambda}{\lambda+\omega}M\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\le 1+M,\quad\forall\lambda\ge 0\end{aligned}\tag{13}$$

となる。故に上式より $x\in\mathscr{X}$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\lambda^{\beta-1}\|(\omega I+A+K)\\&\qquad\{(\lambda+\omega)I+A+K\}^{-1}x\|_{\mathscr{X}}d\lambda\\&\le(M+1)\int_0^\infty\lambda^{\beta-1}\|(\omega I+A)\\&\qquad\cdot\{(\lambda+\omega)I+A\}^{-1}x\|_{\mathscr{X}}d\lambda\end{aligned}$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}((\omega I+A)^\beta)\subset\mathscr{D}((\omega I+A+K)^\beta),\\&\|(\omega I+A+K)^\beta x\|_{\mathscr{X}}\le(M+1)\|(\omega I+A)^\beta x\|_{\mathscr{X}},\\&\qquad\qquad\forall x\in\mathscr{D}((\omega I+A+K)^\beta)\end{aligned}$$

が導かれる。ここで $[0,\infty)\subset\rho(A)$ および命題(3.1)より，$\mathscr{D}(A^\beta)$と$\mathscr{D}((\omega I+A)^\beta)$ は Hilbert 空間として同等なので，

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}(A^\beta)\subset\mathscr{D}((\omega I+A+K)^\beta)\\&\|x\|_{\mathscr{D}((\omega I+A+K)^\beta)}\le q\|x\|_{\mathscr{D}(A^\beta)}),\\&\qquad\qquad\forall x\in\mathscr{D}(A^\beta)\end{aligned}\tag{14}$$

を満たす定数 $q>0$ が存在する。従って(12),(14)より定理が証明される。 □

4．半群の生成作用素に対する分数べき

前節までは正定作用素の性質やその摂動について考察したが，ここでは半群の生成作用素と正定作用素の関係を調べ，その分数べきの性質について考察する。

$\mathscr{X}$を実 Hilbert 空間とする。$[0,\infty)$ 上の$\mathscr{X}$-値連続関数全体の集合は$C([0,\infty);\mathscr{X})$ と表し，各 $k=1,2,\cdots$において，$[0,\infty)$ 上連続で，$(0,\infty)$ 上のk階連続微分可能な$\mathscr{X}$-値関数全体を$C^k([0,\infty);\mathscr{X})$ と表す。ここで$C([0,\infty);\mathscr{X})$ および$C^k([0,\infty);\mathscr{X})$ の元は必ずしも有界とはならないことに注意する。$\{S(t);\,t\ge 0\}$ を$\mathscr{X}$上の C_0-半群とする。このとき，

$$\|S(t)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\le M_\omega e^{\omega t},\quad\forall t\ge 0$$

を満たす $\omega\in\boldsymbol{R}$，$M_\omega>0$ が存在する。上式を満たす $\omega\in\boldsymbol{R}$ の下限 ω_0 は $\{S(t);t\ge 0\}$ の**発展定数**と呼ばれる。また $\{S(t);t\ge 0\}$ の生成作用素Aは

$$Ax:=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(S(h)-I)x,\qquad x\in\mathscr{D}(A)$$

で与えられる。ここで，$\mathscr{D}(A)$は上式の右辺の極限が存在するような $x\in\mathscr{X}$ 全体である。このとき次の定理は重要である[10]。

(4.1) 定理［Hille-吉田の定理］　$\{S(t);t\ge 0\}$ を$\mathscr{X}$上の C_0-半群とする。このとき$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$が半群 $\{S(t);t\ge 0\}$ の生成作用素であるための必要十分条件は，以下の(i)-(iii)が満たされることである。

(i)Aが閉作用素である。

(ii)$\mathscr{D}(A)$が$\mathscr{X}$で稠密である。

(iii) $\omega\in\boldsymbol{R}$と$M_\omega>0$ を適当に取ると，$(\omega,\infty)\subset\rho(A)$かつ

$$\|(\lambda I-A)^{-n}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\le\frac{M_\omega}{(\lambda-\omega)^n},\qquad\forall\lambda>\omega,n=1,2,\cdots.$$

このとき，

$$\|S(t)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\le M_\omega e^{\omega t},\quad\forall t\ge 0$$

が成り立つ。 □

また次の定義をする。

(4.2) 定義　$\{S(t);t\geq 0\}$ を $\mathscr{X}$ 上の C_0-半群とする。このとき

(i)各 $x\in\mathscr{X}$ において $S(t)x$ が $(0,\infty)$ 上で微分可能であるとき，$\{S(t);t\geq 0\}$ は微分可能であるという。

(ii)Δ を複素平面の角領域 $\{\zeta\in\boldsymbol{C};\phi_1<\arg\zeta<\phi_2,\ \phi_1<0<\phi_2\}$ とする。半群 $\{S(t);t\geq 0\}$ が角領域 Δ に解析接続され，次の(a), (b)を満たすとき，$\{S(t);t\geq 0\}$ は解析的半群と呼ばれる。

(a) $\lim_{\Delta\ni\zeta\to 0} S(\zeta)x=x,\quad \forall x\in\mathscr{X}.$

(b) $S(\zeta+\eta)=S(\zeta)S(\eta),\quad \forall\zeta,\eta\in\Delta.$ □

次の2つの命題に注意する。

(4.3) 命題　$\{S(t);t\geq 0\}$ を $\mathscr{X}$ 上の C_0-半群とし，$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ をその生成作用素とする。このとき

(i)任意の $x\in\mathscr{D}(A)$ と各 $t>0$ に対して，

$$S(t)x\in\mathscr{D}(A),\quad \frac{d}{dt}S(t)x=AS(t)x=S(t)Ax$$

が成り立つ。

(ii)$\{S(t);t\geq 0\}$ が微分可能であるとき，各 $t>0$ において，

$$\mathscr{R}(S(t))\subset\mathscr{D}(A^n),\quad \left(\frac{d}{dt}\right)^n S(t)=A^nS(t)\qquad \forall n=1,2,\cdots.$$

が成り立つ。 □

(4.4) 命題　$\{S(t);t\geq 0\}$ を $\mathscr{X}$ 上の C_0-半群とし，$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ をその生成作用素とする。また $[0,\infty)\subset\rho(A)$ を満たすとする。このとき次の(i), (ii)のいずれかが成り立つことと $\{S(t);t\geq 0\}$ が解析的であることとは等価である。

(i)適当な $\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$ と $M>0$ を取るとき，

$$\rho(A)\supset\Omega:=\{\lambda\in\boldsymbol{C};|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}+\delta\}$$

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\leq\frac{M}{|\lambda|},\quad \forall\lambda\in\Omega$$

が成り立つ。

(ii)$\{S(t);t\geq 0\}$ が微分可能で，

$$\|AS(t)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{X})}\leq\frac{N}{t},\quad \forall t>0$$

を満たす $N>0$ が存在する。 □

また次の命題は位相同型作用素の性質を用いて容易に示せるので，その証明は省略する。

(4.5) 命題　$\mathscr{X},\mathscr{Y}$ を実 Hilbert 空間とする。$\mathscr{X}$ 上の C_0-半群 $\{S(t);t\geq 0\}$ の発展定数を ω_0 とし，その生成作用素を $A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ とする。また作用素 $P:\mathscr{Y}\to\mathscr{X}$ が線形位相同型作用素であるとする。このとき

$$A_P:=P^{-1}AP:(\mathscr{D}(A_P)\subset\mathscr{Y})\to\mathscr{Y}$$

は $\mathscr{Y}$ 上の C_0-半群 $\{S_P(t);t\geq 0\}$ を生成し，$\rho(A)=\rho(A_P)$ を満たす。また半群 $\{S_P(t);t\geq 0\}$ の発展定数は ω_0 となり，

$$S_P(t)y=P^{-1}S(t)Py,\quad \forall t\geq 0,\ y\in\mathscr{Y}$$

を満たす。さらに $\{S(t);t\geq 0\}$ が微分可能（resp. 解析的）なとき，$\{S_P(t);t\geq 0\}$ も微分可能（resp. 解析的）となる。 □

次に，半群の生成作用素に対する分数べきについて考える。まず定理(4.1)，定義(2.2)および命題(3.1)を用いると，次の命題が容易に示せる。しかしここではその証明は省略する。

(4.6) 命題　$\mathscr{X}$ をピボット空間とする。発展定数 ω_0 を持つ $\mathscr{X}$ 上の C_0-半群を $\{S(t);t\geq 0\}$ とし，その半群の生成作用素を $A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ とする。また $\omega>\omega_0$ を任意に取る。このとき，$\omega I-A$ は正定作用素となり，任意の $\lambda>\omega_0$ と $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\mathscr{D}((\omega I-A)^\alpha)$ と $\mathscr{D}((\lambda I-A)^\alpha)$ は Hilbert 空間として同等である。さらに，各 $\alpha>0$ において $\mathscr{D}((\omega I-A)^\alpha)$ は $\{S(t);t\geq 0\}$ の下で不変であり，

$$(\omega I-A)^\alpha S(t)x=S(t)(\omega I-A)^\alpha x\qquad \forall t\geq 0,\ x\in\mathscr{D}((\omega I-A)^\alpha)$$

が成り立つ。 □

また正定作用素に対する分数べきの表現に関して，次の命題が成り立つことに注意する[11]。

(4.7) 命題　$A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ を $\mathscr{X}$ 上の C_0-半群 $\{S(t);t\geq 0\}$ の生成作用素とし，$[0,\infty)\subset\rho(A)$

が満たされるとする。このとき $-A$ は正定作用素となり，任意の $\alpha>0$ と $m>\alpha$ なる整数 m に対して

$$(-A)^\alpha x=\frac{1}{K_{\alpha,m}}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(I-S(t))^m x dt,\quad \forall x\in\mathscr{D}((-A)^\alpha)$$

$$K_{\alpha,m}:=\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(1-e^{-t})^m dt$$

が成り立ち，$\mathscr{D}((-A)^\alpha)$は

$$\mathscr{D}((-A)^\alpha)=\left\{x\in\mathscr{X};\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\|(I-S(t))^m x\|_{\mathscr{X}}dt<\infty\right\}$$

とも表される。 □

命題(4.7)を用いると，次の命題が証明できる。

(4.8) 命題 $A:(\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{X})\to\mathscr{X}$ が $\mathscr{X}$ 上の C_0-半群 $\{S(t);t\geq 0\}$ の生成作用素であり，$[0,\infty)\subset\rho(A)$ を満たすとする。また，$[0,\infty)$ 上の $\mathscr{X}$-値関数 $v(\cdot)$ に対して，

$$x(t):=\int_0^t S(t-s)v(s)ds,\quad t\geq 0$$

とおく。このとき

(i) $\alpha\in[0,1]$ とする。$v(\cdot)\in C([0,\infty);\mathscr{D}((-A)^\alpha))$ の時，各 $t\geq 0$ において $x(t)\in\mathscr{D}((-A)^\alpha)$ であり，

$$y_\alpha(t):=(-A)^\alpha x(t)=\int_0^t S(t-s)(-A)^\alpha v(s)ds,\quad \forall t\geq 0 \quad (1)$$

を満たす。また，$y_\alpha(\cdot)$は $[0,\infty)$ 上の $\mathscr{X}$-値連続関数となる。

(ii) $v(\cdot)\in C^1([0,\infty);\mathscr{X})$ の時，各 $t\geq 0$ において $x(t)\in\mathscr{D}(A)$であり，

$$y(t):=Ax(t)=S(t)v(0)-v(t)+\int_0^t S(t-s)\dot{v}(s)ds,\quad \forall t\geq 0 \quad (2)$$

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+v(t)=y(t)+v(t)\quad \forall t>0 \quad (3)$$

を満たす。さらに，$v(\cdot)\in C^2([0,\infty);\mathscr{X})$, $v(0)=0$ とすると，$y(\cdot)$は$[0,\infty)$ 上で連続微分可能な関数となり，

$$\dot{y}(t)=A(y(t)+v(t))\quad \forall t>0$$

となる。

[証明] (i) $\alpha\in[0,1]$ を任意にとり，$v(\cdot)\in C([0,\infty);\mathscr{D}((-A)^\alpha))$ とする。まず，各 $t\geq 0$ において，$x(t)\in\mathscr{D}((-A)^\alpha)$となり，(1)が成り立つことを示す。$t=0$ の時は明らかに成り立つので，$t>0$ とする。ここで，$(-A)^\alpha$ は閉線形作用素なので，

$$\|(-A)^\alpha S(t-\cdot)v(\cdot)\|_{\mathscr{X}}=\|S(t-\cdot)(-A)^\alpha v(\cdot)\|_{\mathscr{X}}$$

が $[0,t]$ 上可積分であることを示せばよいことがわかる。いま，$v(\cdot)\in C([0,\infty);\mathscr{D}((-A)^\alpha))$より，$(-A)^\alpha v(\cdot)\in C([0,\infty);\mathscr{X})$であり，$S(t-\cdot)(-A)^\alpha v(\cdot)$は $[0,t]$ 上の $\mathscr{X}$-値連続関数となる。故に，

$$\int_0^t\|S(t-s)(-A)^\alpha v(s)\|_{\mathscr{X}}ds<\infty$$

となり，(1)は示される。また $y_\alpha(\cdot)$ の連続性は，上式と $t\to 0$ のとき $(-A)^\alpha x(t)\to 0=(-A)^\alpha x(0)$ となることより容易に分かる。

(ii) $v(\cdot)\in C^1([0,\infty);\mathscr{X})$ とする。まず任意の $t>0$ に対して，$x(t)\in\mathscr{D}(A)$ であり，(2)が成り立つことを示す。$t=0$ の時は明らかになりたつので，$t>0$ とする。いま，$v(\cdot)\in C^1([0,\infty);\mathscr{X})$ なので

$$\dot{v}(s)=\lim_{h\to 0}\frac{v(s+h)-v(s)}{h} \quad (4)$$

が $[0,t]$ 上で一様収束することに注意する。$h\in(0,t)$ とするとき

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}(S(h)-I)x(t)\\&=\frac{1}{h}\int_{-h}^0 S(t-s)v(s+h)ds-\frac{1}{h}\int_{t-h}^t S(t-s)v(s)ds\\&\quad+\int_0^{t-h}S(t-s)\left(\frac{v(s+h)-v(s)}{h}\right)ds\\&\to S(t)v(0)-v(t)+\int_0^t S(t-s)\dot{v}(s)ds\quad(h\to 0)\end{aligned}$$

が得られる。また $h<0$ の時も上式と同じ結果が得られるので，$x(t)\in\mathscr{D}(A)$ となり，(2)が成り立つ。

次に(3)を示す。$t>0$, $h>0$ とする。再び(4)が有界区間上で一様収束することに注意すると，

$$\frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))$$

$$=\frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h} S(t+h-s)v(s)ds-\int_0^t S(t-s)v(s)ds\right\}$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h S(t+h-s)v(s)ds$$

$$+\int_0^t S(t-s)\left(\frac{v(s+h)-v(s)}{h}\right)ds$$

$$\to S(t)v(0)+\int_0^t S(t-s)\dot{v}(s)ds \quad (h\to 0)$$

が得られる。また $h\in(-t,0)$ の時も同じ結果が得られるので，$x(\cdot)\in C^1([0,\infty);\mathscr{X})$ であり，

$$\dot{x}(t)=S(t)v(0)+\int_0^t S(t-s)\dot{v}(s)ds \quad \forall t>0$$

となる。故に，上式と(2)より(3)式が得られる。

さらに，$\{S(t);t\geq 0\}$ を微分可能な C_0-半群とし，$v(\cdot)\in C^2([0,\infty);\mathscr{X})$ とする。このとき，命題(4.3)-(ii)より $S(\cdot)v(0)\in C^1([0,\infty);\mathscr{X})$ となり，また $\dot{v}(\cdot)\in C^1([0,\infty);\mathscr{X})$ なので，(2)式と上述の議論より，$y(\cdot)$は $(0,\infty)$ 上で連続微分可能であり，(3)と命題(4.3)-(ii)を用いると

$$\dot{y}(t)=AS(t)v(0)+A\int_0^t S(t-s)\dot{v}(s)ds$$

$$=A\left(S(t)v(0)+\int_0^t S(t-s)\dot{v}(s)ds\right)$$

$$=A(y(t)+v(t)), \qquad \forall t>0$$

が得られる。これで命題(4.8)の証明が終わる。□

5．おわりに

本稿では，境界入力システムのモデルおよびその解析に必要となるが，数学の分野ではあまり検討されてはいなかったと思われる基本的な事項も含めて整理した。まず正定作用素の定義は [5] 等と同じであるが，負べきの定義が従来の定義の拡張となっているため，それらの指数法則等については改めて証明した。また分数べきの拡張や拡張された正定作用素の分数べきは，これまであまり詳しく議論されてこなかった分野と思われるが，一般境界入力システムを分布入力システムの等価性を議論するときには無くてはならない概念である。

生成作用素の摂動は，一般境界入力システムのフィードバック特性を調べるときに用いる。[4] では解析的半群で表現されるシステムに対して考察していたが，分数べきに関してだけならば，正定作用素であれば十分である。半群の生成作用素に対する分数べきに関しては [6,11] から多くを引用した。

本稿には，境界入力システムの解析の中で共に議論されることがより相応しい内容も含まれており，命題の記述だけではその適用が想像しにくい所もあろう。今後それらの適用も含めて，境界入力システムの解析について逐次報告して行くつもりである。

謝　辞

著者は約10年間境界入力システムの解析をテーマに研究してきたが，その研究開始当初から数々の助言によって著者をここまで導いてくれた，東京電機大学理工学部の稲葉博教授に感謝する。

References

[1] Balakrishnan, A. V., Boundary control of parabolic equations: L-Q-R theory, *Proc. Conf. Theory of Nonlinear Equations*, published by Academie-Verlag (1978)

[2] Hinata, H., A mathematical foundation for boundary input linear systems in Banach space, Master Thesis, Tokyo Denki Univ., 1984

[3] Inaba, H. and Hinata, H., A mathematical model for boundary control systems in Hilbert space, *Proc. 6th SICE Symp. Dynamical System Theory*, pp.229-234 (1983)

[4] Inaba, H. and Hinata, H., A mathematical model for boundary input systems, *Proc. 32nd IEEE CDC*, pp.1854-1859 (1993)

[5] Komatsu, H., Fractional powers of operators, *Pacific J. Math.*, 19, pp.285-346. (1966)

[6] Komatsu, H., Fractional powers of operators, II Interpolation spaces, *Pacific J. Math.*, 21, pp.89-111. (1966)

[7] Lasiecka, I., Unified theory for abstract para-

bolic boundary problems - A semigroup approach, *Appl. Math. Optim.*, 6,pp. 287-333 (1980)

[8] Lasiecka, I. and Triggiani, R., Feedback semigroup and cosine operators for boundary feedback parabolic and hyperbolic equations, *J. Diff. Eq.*, 47,pp. 246-272(1983)

[9] Salamon, D., Infinite dimensional linear systems with unbounded control and observation: A functional analytic approach, *Trans. AMS*, 300,pp. 383-431 (1987)

[10] Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer,1983

[11] Muramatsu, T., Interporation theory and linear operators, Kinokuniya,1985(In Japanese)