

渦糸によるグリーン関数を用いた 水中翼に働く造波抵抗の算定

堀 勉*

A Theoretical Evaluation of Wave-Making Resistance Acting on the Hydrofoil Using Green Function Caused by Line Vortices

Tsutomu HORI

In this paper, Green function of vortex system with wave generation is formulated by constructing the model of line vortices. If the present Green function is applied to lifting surface problems with free surface effects, we can solve them with higher accuracy in comparison with the case of point vortex approximation even though submerged depth becomes shallow.

Also, components of drag force which acts on the hydrofoil are evaluated by momentum theorem taking account of the wave generation and the trailing vortices. Then, it is possible to compute without the interference of induced drag and wave-making resistance as far as vortex model has normal image system which satisfies the rigid wall conditions at the free surface.

And, it was shown that the lifting line approximation for calculating wave-making resistance isn't valid in the case of low speed. However, for the limiting case of high speed, flow field is represented by inverse image system and above-mentioned approximation is useful.

1. 序 論

水中翼に作用する流体力を推定する理論的な手法としては、古くは丸尾¹⁾、山本²⁾、西山^{3), 4)}らの先達によって、揚力線理論に線型造波理論的な立場から自由表面影響を考慮した形で取り扱われてきた。それによって幾つかの貴重な知見がもたらされ、その自由表面影響についても定性的にはかなりの部分で解明されてきた感がある⁵⁾。一方、更に定量的な議論に立ち入るべく、最近では中武・安

東・片岡ら⁶⁾によるランキン・ソース法を用いた数値解法や、 Li ⁷⁾によって揚力面を馬蹄形渦によるグリーン関数を用いて解いた結果も報告されている。このような状況の中、先に著者⁸⁾も定常揚力面の数値解析法として、 Li とは異なる立場から揚力面を格子状の渦輪で離散表記し^{9), 10)}、核関数に渦システムによる造波グリーン関数を導入して解析する手法を提案した。ただし、その際のグリーン関数の計算は、区分的に渦点近似を採用して行なったものであるため、水中翼の没水深度がある程度深い場合はともかく、浅深度域になればその近

*情報科学センター助教授
1995年10月24日受付

似の影響によって、積分値として得られる流体力のレベルにおいても幾分かの誤差が生ずることが予想される。そこで、核関数に採用するに当っては、渦糸モデルとしてのグリーン関数を構築しておくことが必要であると考えられる。それによって、計算アルゴリズムが単純で実用的な渦点近似が許される深度域等についても何らかの指針を得ることができるものとする。

また、本報告では、翼に作用する流体力として揚力成分のみならず、水平方向の抗力成分についても計算する。その際、自由表面を伴う場合の抗力成分について運動量定理に基づいて検討したところ、正鏡像渦を考慮した流場では、誘導抵抗と造波抵抗が干渉することなく算定できることも分かった。また、抗力成分に占める造波抵抗の割合や揚力線近似の適用の可否について、自由波の振幅関数のレベルから考察した結果についても報告し、諸賢の批判を仰ぐ次第である。

2. 渦糸モデルによるグリーン関数の構築

自由表面影響を考慮した定常揚力面問題について考える。座標系および無次元化は、前報⁸⁾と同様とし、Fig. 1 に示すように、静水面上に座標原点 o を配し、一様な流れ方向に x 軸、鉛直上向きに z 軸、これらと右手系で直交するよう右舷方向に y

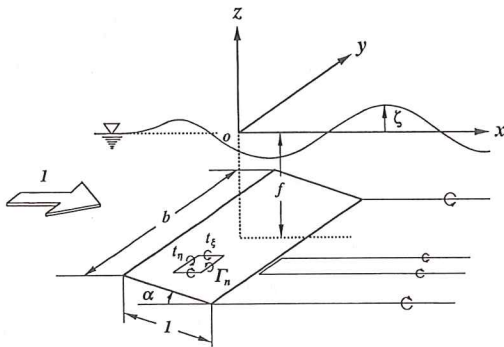


Fig. 1 Coordinate system and definitions of some basic quantities in the submerged lifting surface problem.

軸を取ったデカルト座標系を用い、物理量は全て、翼弦長 c 、一様流速 U 、流体密度 ρ を規準に無次元化して扱う。

したがって、自由表面を有する大きさ 1 の流れの中に、コード 1、スパン b の揚力面が、コードに対する相対深度 f で没水しているとして、境界値問題を設定する。その際、境界条件その他は全て線型化の仮定が許されるものとして扱うこととし、随伴渦は翼後縁のみから流出し、その誘導速度や波動による変形は考慮しない。

2. 1 渦点によるグリーン関数

揚力面は、 z の負軸向きのダブルレット分布として捉えることができ、それを Fig. 1 に示すように区分的にその面密度 Γ_n を一定にして N 個の格子に離散化することにより、渦輪の重畳として表現される^{8)Eq.(6)}。そこで、自由表面影響を考慮した誘導速度場 v を、正鏡像モデルによる渦成分とグリーン関数 G_{point} の重畳として、

$$v = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \Gamma_n \int_{C_n} \left\{ \nabla_P \times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) t_r + \nabla_P G'_{point} \right\} ds \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{但し, } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+f)^2}$$

$$r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-f)^2}$$

のように構成する。ここに、式中の t_r は、 $t_r = t_x i + t_y j$ で表わされる水平面内にある渦糸の方向ベクトルであり、 $\nabla_P \left(= i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right)$ は、field point $P(x, y, z)$ に対する勾配演算子である。このとき、満足すべき線型自由表面条件式 $[F]$ は、正鏡像効果により静水面上で渦成分の z 方向速度を生じないから、

$$[F] \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(u_r + \frac{\partial G'_{point}}{\partial x} \right) + \kappa_0 \frac{\partial G'_{point}}{\partial z} + \mu \frac{\partial G'_{point}}{\partial x} = 0 \quad (\text{on } z=0) \dots\dots\dots(2)$$

となる。ここに、式中の u_r は渦成分による誘導速度の x 成分であり、

$$u_r = -t_y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \dots\dots\dots(3)$$

である。また、 $k_0 \left(= \frac{gc}{U^2} = \frac{1}{F_n^2} \right)$ は、コード c を規準にした無次元波数、 μ は生成波の放射条件を要求する Rayleigh の仮想摩擦係数であり、グリーン関数構築後は $\mu \rightarrow +0$ とするものである。この $[F]$ を満たす正鏡像モデルによる渦点 $(\xi, \eta, -f)$ のグリーン関数 G'_{point} は、通常の一変換の手法にしたがい前報⁸⁾ Eq.(12)で、 x の負軸向きダブレットのそれを定数 $\frac{t_\eta}{k_0}$ 倍した形として、

$$G'_{point} = \frac{it_\eta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z-f) + ik(\omega - \omega')}}{k - k_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} k dk$$

$$\sim -4k_0 t_\eta \operatorname{Re} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{k_0(z-f) \sec^2 \theta + ik_0(\omega - \omega') \sec^2 \theta} \sec^3 \theta d\theta}{k - k_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} \right] \dots\dots\dots(4)$$

但し、 $\begin{cases} \omega = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \omega' = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \end{cases}$

のように求められており、横渦成分 t_η のみに支配され、縦渦 t_ξ からは波を生じないことが特徴的である。

2.2 渦糸によるグリーン関数

前節(4)式の G'_{point} を、Fig. 2 に示すような矩形状の渦輪で積分することを考える。このとき、 x 軸に平行な径路は横渦成分がないから、 $x = \xi, z = -f$ なる y 軸方向の径路上で、 $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ 間についてのみ積分すればよい。このとき、渦輪の y 方向の1辺に相当する長さ $\delta\eta (= \eta_2 - \eta_1)$ の有限長な横渦糸のグリーン関数 G'_{tine} は、

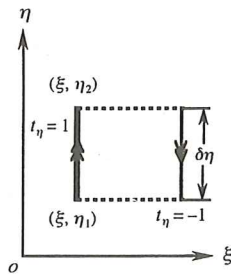


Fig. 2 Integral path along the rectangular ring vortex.

$$G'_{tine} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} G'_{point} d\eta$$

$$= \frac{t_\eta}{\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_{-\pi}^{\pi} \cot \theta \sec^2 \theta d\theta$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z-f) + ik(\omega - \omega'_j)}}{k - k_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk \dots\dots\dots(5)$$

のように、端点 $j=1, 2$ での値の減算によって求められ、 t_η は横渦の方向によって $t_\eta = \pm 1$ の値を取る。ただし、被積分関数に $\cot \theta$ が乗じられていることから、(4)式の渦点の場合とは異なって、積分の際 $\theta=0$ 近傍での取り扱いに注意を要すること分かる。ここに、 ω'_j は渦糸端点 $Q_j(\xi, \eta_j)$ での ω を意味し、

$$\omega'_j = \xi \cos \theta + \eta_j \sin \theta \quad (j=1, 2) \dots\dots\dots(6)$$

である。

2.3 渦糸による誘導速度場とその計算法

ここでは、揚力面上での境界条件の計算に不可欠な z 方向の誘導速度の計算式を、渦糸モデルで求めておく。

まず、(5)式の G'_{tine} を z で偏微分すれば、

$$\frac{\partial G'_{tine}}{t_\eta \partial z} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_{-\pi}^{\pi} \cot \theta \sec^2 \theta d\theta$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z-f) + ik(\omega - \omega'_j)}}{k - k_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} k dk \dots\dots(7)$$

となり、これを k に関する次数を下げ、 θ に関する積分区間を半分に戻して表記すれば、

$$\frac{\partial G'_{tine}}{t_\eta \partial z} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1}$$

$$\times \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cot \theta \sec^2 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(\tilde{z} - \tilde{\omega}_j)}}{k - k_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk \right. \dots\dots(8)$$

$$\left. + k_0 \int_{\frac{\pi}{2} + \theta_j}^{\frac{\pi}{2} + \theta_j} \cot \theta \sec^4 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(\tilde{z} - \tilde{\omega}_j)}}{k - k_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{z} &\equiv z - f, \quad \tilde{\omega}_j \equiv \omega - \omega'_j \\ \text{但し、} \quad \theta_j &= \tan^{-1} \frac{\tilde{y}_j}{\tilde{x}}, \quad \tilde{x} \equiv x - \xi, \quad \tilde{y}_j \equiv y - \eta_j \end{aligned} \right\}$$

のように書くことができ、形式的には前報⁸⁾ Eq.(25) の渦点に対する $\frac{\partial G'_{point}}{t_\eta \partial x}$ の積分項に $\cot \theta$ を乗じたものに相当する。ここに、偏角 θ_j は $-\pi \leq \theta_j \leq \pi$ の範囲にあるものとし、第2項の θ に関する積分区間は $\tilde{\omega}_j > 0$ となるように取ったものである。また、 $\operatorname{Re} [\dots]$ は、大括弧内の実部を取ることを意味する。

(8)式は、渦点近似の場合と k に関する積分につ

いては全く同形式であるから、前報⁸⁾と同様な手法を用いて k に関する積分を実行すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G'_{line}}{t_\eta \partial z} = & \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot \theta \sec^2 \theta}{\tilde{f} - i\tilde{\omega}_j} d\theta \right. \\ & + k_0 \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta_j}^{\frac{\pi}{2} + \theta_j} \cot \theta \sec^4 \theta \\ & \times \left. \left\{ \begin{aligned} & -e^{-f^* + i\tilde{\omega}_j^*} \operatorname{Ei}(f^* - i\tilde{\omega}_j^*) \\ & + 2\pi i e^{-f^* + i\tilde{\omega}_j^*} \frac{\operatorname{sgn}(\sec \theta) + 1}{2} \end{aligned} \right\} d\theta \right] \quad (9) \\ & \text{但し, } \left. \begin{aligned} f^* & \equiv k_0 \tilde{f} \sec^2 \theta \\ \tilde{\omega}_j^* & \equiv k_0 \tilde{\omega}_j \sec^2 \theta \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

のように書くことができ、符号関数 $\operatorname{sgn}(\dots)$ を導入したことにより自由波の放射条件を自動的に満足させ得る。また、式中に現われる Ei は、

$$\operatorname{Ei}(f^* - i\tilde{\omega}_j^*) = - \int_{f^* - i\tilde{\omega}_j^*}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \dots \dots \dots (10)$$

で定義される積分指数関数であり、その級数展開式および漸近形は、前報⁸⁾ Eq.(30), (31) に示す通りである。

数値計算の便を図って、更に(9)式を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial G'_{line}}{t_\eta \partial z} = & \frac{2k_0}{\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \\ & \times \left[\int_{-\frac{\pi}{2} + \theta_j}^{\frac{\pi}{2} + \theta_j} A_j(\theta) d\theta - 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta_j}^{\frac{\pi}{2} + \theta_j} \frac{1 - \operatorname{sgn}(\frac{\theta}{2})}{2} B_j(\theta) d\theta \right] \\ & \equiv \frac{2k_0}{\pi} \cdot \{A_1^* - A_2^*\} - 4k_0 \cdot \{B_1^* - B_2^*\} \quad \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

のようになり、 A_j に関する第1項が局部攪乱波、 B_j に関する第2項が後続自由波に相当する。ここに、式中の A_j^*, B_j^* は、 A_j, B_j それぞれに対応する積分値を表わしている。また、自由波成分の B_j に関する積分区間は、放射条件を考慮していることから、 \hat{y}_j の正負によって異なる。

ここに、第1項の局部波成分の被積分関数 A_j は、

$$A_j(\theta) = \left\{ \frac{f^*}{f^{*2} + \tilde{\omega}_j^{*2}} - e^{-f^*} (E_c \cos \tilde{\omega}_j^* - E_s \sin \tilde{\omega}_j^*) \right\} \cdot \cot \theta \sec^4 \theta$$

$$\sim - \cot \theta \sum_{m=2}^M \frac{(m-1)! \cos^{2m-4} \theta}{(k_0 \sqrt{\tilde{f}^2 + \tilde{\omega}_j^{*2}})^m} \cos \left\{ m \left(\Omega_j - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し, } \Omega_j & = \tan^{-1} \left(\frac{f^*}{\tilde{\omega}_j^*} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{\omega}_j} \right) \\ R_j^* & = \sqrt{f^{*2} + \tilde{\omega}_j^{*2}} = k_0 \sec^2 \theta \sqrt{\tilde{f}^2 + \tilde{\omega}_j^2} \end{aligned} \right\}$$

のように書き表わされ、式中の E_c, E_s は、

$$\begin{aligned} E_c + iE_s = & \gamma + \ell \log_e \sqrt{f^{*2} + \tilde{\omega}_j^{*2}} + i \left(\Omega_j + \frac{\pi}{2} \right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{f^{*2} + \tilde{\omega}_j^{*2}}}{m \cdot m!} e^{im(\Omega_j - \frac{\pi}{2})} \quad \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

但し、 $\gamma = 0.57721 \dots \dots$ (Euler の定数)

で計算でき、(10)式の Ei を級数表示したものの実部と虚部に相当する。また、(12)式の後者に現れる M は漸近級数の打ち切り項数であり、 $\frac{M}{R_j^*} \leq 1$ によって判定する。実際の計算は、両展開式を $R_j^* = 25$ を境に切り換えて行なった。

一方、第2項の自由波成分の B_j については、

$$B_j(\theta) = e^{-f^*} \sin \tilde{\omega}_j^* \cot \theta \sec^4 \theta \dots \dots \dots (14)$$

であり、 A_j, B_j ともに前報で求めた渦点近似の場合の x 方向微係数⁸⁾ Eq.(32), (34) に $\cot \theta$ を乗じた形として得られている。また、積分後 A_j^*, B_j^* はともに \hat{y}_j について反対称となるから、後者の自由波成分についても反対称性を利用して、片舷の値のみから求めることもできる。しかし、ここでは $\theta = 0$ での積分の発散を防ぐ意味から、反対称性を用いず、

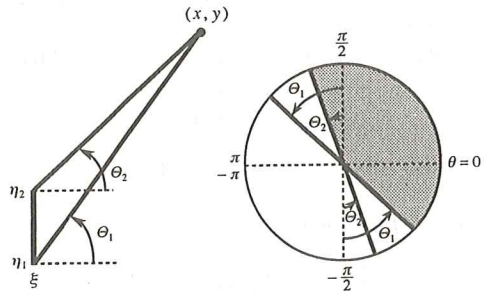


Fig. 3 Integral range of θ for the calculation of local waves at downstream region $x - \xi \geq 0$.

常に(11)式のように減算の形で計算する。

以上得られた各端点 ($j=1, 2$) での表示式を用いて、渦糸としての計算を行なう。このとき、 j によって被積分関数のみならず、 θ に関する積分区間も異なってくるため数値計算に当っては、 $j=1, 2$ についての積分区間の重なり注意到しながら、 Θ_1, Θ_2 に応じた場合分けが必要である。

まず、局部波成分 $A_1^* - A_2^*$ について考える。 $x - \xi \geq 0$ なる下流側では、Fig. 3 に示すように $-\frac{\pi}{2} < \Theta_2 < \Theta_1 < \frac{\pi}{2}$ であり、 \hat{y}_1, \hat{y}_2 の大小関係に依らず、積分区間は

$$\left[A_1^* - A_2^* \right]_{x-\xi \geq 0} = \int_{\frac{\pi}{2} + \Theta_2}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_1} A_{1d} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2} + \Theta_1}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_2} (A_1 - A_2) d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2} + \Theta_2}^{-\frac{\pi}{2} + \Theta_1} A_{2d} d\theta \dots\dots\dots(15)$$

のように分けられる。ただし、 y 軸に平行な $x = \xi$ 上では $\omega_j^* = \kappa_0 \hat{y}_j \tan \theta \sec \theta$ となり、 $y = \eta_j$ なる端点を除けば、渦糸上でも、その延長線上でも、 Θ_1, Θ_2 いずれも $\pm \frac{\pi}{2}$ の値を取り、上式3項の積分区間は $-\pi \leq \theta \leq 0$ か $0 \leq \theta \leq \pi$ 、もしくは上下限が一致するから、その被積分関数の $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ に関する反対称性により、その線上での局部波成分は消失する。また、 $x - \xi < 0$ の上流側に対しては、その $x = \xi$ に関する反対称性を利用して、

$$\left[A_1^* - A_2^* \right]_{x-\xi < 0} = - \left[A_1^* - A_2^* \right]_{x-\xi \geq 0} \dots\dots\dots(16)$$

によって求め得る。実際の数値積分は、Simpson の第1法則によった。

一方、自由波成分 $B_1^* - B_2^*$ については、その放

射条件のため、局部波のように単純に $x = \xi$ に関して対称とか反対称にはならないため、(11)式に対する積分区間の場合分けは複雑で、 \hat{y}_1, \hat{y}_2 の大小関係に応じた a) $\hat{y}_1 > 0, \hat{y}_2 > 0$, b) $\hat{y}_1 < 0, \hat{y}_2 < 0$, c) $\hat{y}_1 > 0, \hat{y}_2 < 0$ の3状態について、それぞれ $x - \xi$ の正負に分けて、都合6通りについて扱わねばならない。実際、下流側の $x - \xi \geq 0$ について、Fig. 4 を参照しながら場合分けしてみると、 $0 \leq |\Theta_{1,2}| \leq \frac{\pi}{2}$ だから、

$$\left. \begin{aligned} B_1^* - B_2^* &= \int_{\frac{\pi}{2} + \Theta_1}^{\frac{\pi}{2}} (B_1 - B_2) d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2} + \Theta_2}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_1} B_2 d\theta \dots\dots\dots a) \\ &= \int_{\frac{\pi}{2} + \Theta_1}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_2} B_1 d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_2} (B_1 - B_2) d\theta \dots\dots\dots b) \\ &= \int_{\frac{\pi}{2} + \Theta_1}^{\frac{\pi}{2}} B_1 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2} + \Theta_1}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_2} (B_1 - B_2) d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \Theta_1} B_2 d\theta \dots\dots\dots c) \end{aligned} \right\} \dots\dots(17)$$

のようになる。同様なことを $x - \xi < 0$ なる上流側に対しても行なってみると、 $\frac{\pi}{2} < |\Theta_{1,2}| \leq \pi$ だから、

$$\left. \begin{aligned} B_1^* - B_2^* &= \int_{-\frac{\pi}{2} + \Theta_1}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_2} B_1 d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2} + \Theta_2}^{\frac{\pi}{2}} (B_1 - B_2) d\theta \dots\dots\dots a) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_1} (B_1 - B_2) d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2} + \Theta_2}^{\frac{\pi}{2} + \Theta_1} B_2 d\theta \dots\dots\dots b) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2} + \Theta_1}^{\frac{\pi}{2}} B_1 d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \Theta_2} B_2 d\theta \dots\dots\dots c) \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

のようになる。ただし、上流側に対する(18)式の case c) については、積分区間の重なりはなく、原式をそのまま積分している。以上、自由波成分の場合、積分区間に $\theta = 0$ を含むのは(17)式に示す下流側の、しかも $B_1 - B_2$ に関する減算項のみである。ただし、渦糸を含む y 軸に平行な $x = \xi$ なる直線の近

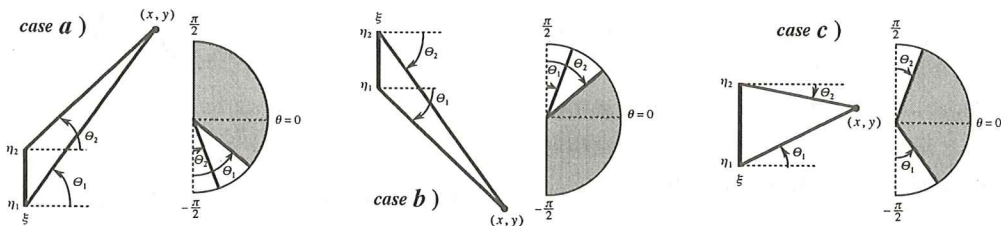


Fig. 4 Integral range of θ for the calculation of free waves at downstream region $x - \xi \geq 0$. [a) $\hat{y}_1 > 0, \hat{y}_2 > 0$, b) $\hat{y}_1 < 0, \hat{y}_2 < 0$, c) $\hat{y}_1 > 0, \hat{y}_2 < 0$]

傍では $\theta_j \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ となって、単項 B_j についても $\theta \rightarrow 0, \pi$ を含むが、この場合 $\left| \frac{\hat{x}}{\hat{y}_j \tan \theta} \right| \ll 1$ が成立する程度の近傍では $\omega_j^* \approx \kappa_0 \hat{y}_j \tan \theta \sec \theta$ となるから、(14)式の B_j を θ に関して展開すると、

$$B_j \sim_{\theta \rightarrow 0} \kappa_0 \hat{y}_j e^{-\kappa_0 \hat{r}} \left\{ 1 - \frac{15 - 6\kappa_0 \hat{f} - \kappa_0^2 \hat{y}_j^2}{6} \theta^2 + \dots \right\} \dots (19)$$

のようになり、 $\cot \theta$ なる因数が相殺するため特異性は生じない。

上述の検討から、局部波、自由波成分ともに、渦糸の端点毎の積分が特異となる $\theta=0$ は、両者の積分区間が重なった Fig. 3, 4 で網掛けした範囲内においてのみ生ずることが分かる。そこで、減算した被積分関数 $A_1 - A_2$ 及び $B_1 - B_2$ の $\theta=0, \pi$ 周りの挙動を調べておく。

まず、局部波成分 $A_1 - A_2$ については、(16)式の関係から $x - \xi \geq 0$ に対する(15)式のみで計算するから、 $\theta \rightarrow 0$ についてのみ検討すればよく、 $R^{*(0)} (= \kappa_0 \sqrt{\hat{f}^2 + \hat{x}^2}) \rightarrow \infty$ での漸近形も併せて記すと、

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 \sim_{\theta \rightarrow 0} & -\kappa_0 \delta \eta \cdot \left[\frac{\hat{x}}{\kappa_0 (\hat{f}^2 + \hat{x}^2)} + \frac{2\hat{f}\hat{x}}{\kappa_0^2 (\hat{f}^2 + \hat{x}^2)^2} \right. \\ & - e^{-\kappa_0 \hat{r}} \cdot (E_C^{(0)} \sin \kappa_0 \hat{x} + E_S^{(0)} \cos \kappa_0 \hat{x}) \\ & + \kappa_0 \hat{y}_0 \theta \cdot \left[\frac{\hat{f}}{\kappa_0 (\hat{f}^2 + \hat{x}^2)} + \frac{\hat{f}^2 - \hat{x}^2}{\kappa_0^2 (\hat{f}^2 + \hat{x}^2)^2} + \frac{2\hat{f}(\hat{f}^2 - 3\hat{x}^2)}{\kappa_0^3 (\hat{f}^2 + \hat{x}^2)^3} \right. \\ & \left. \left. - e^{-\kappa_0 \hat{r}} \cdot (E_C^{(0)} \cos \kappa_0 \hat{x} - E_S^{(0)} \sin \kappa_0 \hat{x}) \right] + \dots \right] \\ \sim_{\frac{\theta \rightarrow 0}{\kappa_0 \sqrt{\hat{f}^2 + \hat{x}^2} \rightarrow \infty} & -\kappa_0 \delta \eta \cdot \left[\sum_{n=3}^M \frac{(n-1)!}{(\kappa_0 \sqrt{\hat{f}^2 + \hat{x}^2})^n} \cdot \sin \left\{ m \left(Q^{(0)} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \kappa_0 \hat{y}_0 \theta \cdot \sum_{n=4}^M \frac{(n-1)!}{(\kappa_0 \sqrt{\hat{f}^2 + \hat{x}^2})^n} \cos \left\{ m \left(Q^{(0)} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \right] + \dots \dots (20) \end{aligned}$$

のようになり、ともに $\delta \eta$ 程度の大きさとして得られ、また θ に関する1次の項については \hat{y}_0 に比例して増加する。ここに、 $\delta \eta$ は区分的な渦糸の長さを、 \hat{y}_0 は渦糸の midpoint から測った y 座標に相当するものであり、それぞれ \hat{y}_1, \hat{y}_2 を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \delta \eta &= \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \quad (= \eta_2 - \eta_1) \\ \hat{y}_0 &= \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{2} \quad (= y - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

のように表される。また、式中の $E_C^{(0)}, E_S^{(0)}, \Omega^{(0)}, R^{*(0)}$ は、それぞれ $\theta=0$ での $E_C, E_S, \Omega_j, R_j^*$ の値を意味し、

$$E_C^{(0)} + iE_S^{(0)} = \text{Ei} \left(\kappa_0 (\hat{f} - i\hat{x}) \right) \dots \dots \dots (22)$$

のように \hat{y}_j に無関係に定まることから、その値は j に依らない。

一方、自由波成分についても、その減算項 $B_1 - B_2$ の $\theta=0, \pi$ 周りの挙動を求めると、

$$B_1 - B_2 \sim_{\theta \rightarrow 0} \kappa_0 \delta \eta e^{\kappa_0 \hat{r}} \times \left\{ \cos \kappa_0 \hat{x} - \kappa_0 \hat{y}_0 \theta \cdot \sin \kappa_0 \hat{x} + \dots \right\} \dots \dots (23)$$

のようになり、(20)式の局部波成分と同様、やはり渦長 $\delta \eta$ 程度の量として得られ、また θ に関する線型項は \hat{y}_0 に比例している。

以上、 $\theta=0$ 近傍では常に被積分関数を減算の形で処理し、(20), (23)式に示した展開式を用いることにすれば、局部波、自由波両成分とも数値計算上の技巧¹¹⁾も施さなくても、発散の不都合は生じ

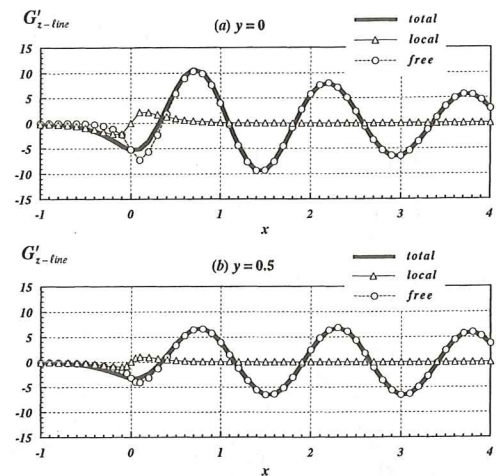


Fig. 5 Components of z -derivative of Green function for a transverse line vortex in the case of $F_n=0.5, f=0.25$ on $z=-f$. [(a) $y=0, (b)y=0.5$]

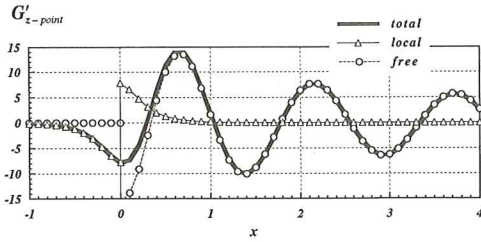


Fig. 6 Components of z -derivative of Green function for a transverse point vortex in the case of $F_n=0.5, f=0.25$ on $y=0, z=-f$.

ない。なお、自由波成分の数値積分に当っては、 B_j^* の $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ での変動が激しいことから、 $t = \tan \theta$ なる変数変換を施して行なう。実際の計算には、 B_1, B_2 それぞれ単項の場合は 1 次式近似の Fillon の積分公式を、減算項の $B_1 - B_2$ については Simpson の第 1 法則を用いて行なった。なお、 B_j に関する t ベースの積分区間の上限が ∞ に及ぶときの数値的終端 $T_\infty^{B_j}$ については、 t に関する被積分関数 $\frac{B_j}{1+t^2}$ の $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動から、グリーン関数の要求精度を ε とするとき、

$$T_\infty = \sqrt{\frac{1}{k_0 f} \log_e \left(\frac{2}{f \varepsilon} \right)} \dots \dots \dots (24)$$

として、陽に確定することができる。

2. 4 渦糸によるグリーン関数の計算例

ここでは、前節で導いた表示式にしたがって、単一の渦糸によるグリーン関数を計算した結果を示す。計算条件はフルード数 $F_n=0.5$ 、没水深度 $f=0.25$ であり、後に示す Fig. 12 において揚力や抵抗値が、浅深度域でほぼピークを取る辺りの速度に対応する。

原点直下に中心を持つ単位長さの横渦糸によるグリーン関数の z 方向微係数は、(11)式において $t_0=1, \xi=0, \eta_1=-0.5, \eta_2=0.5$ として計算できる。Fig. 5 は、渦糸の没水深度上 $z=-f$ での微係数の値を置点したものであり、(a)が $y=0$ 、(b)が $y=0.5$ での結果であり、それぞれ局部波成分と自由波成分に分離して表示したものである。一方、Fig. 6 に

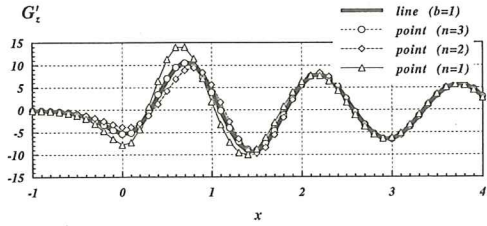


Fig. 7 Comparison of z -derivative of Green function caused by line vortex and superposition of point vortex in the case of $F_n=0.5, f=0.25$ on $y=0, z=-f$.

は、比較のために、原点直下に置かれた渦点によるそれを示しており、同じく没水深度上 $y=0$ での値であり、Fig. 5 (a)に対応している。

Fig. 5 (a)の結果を見ると、渦糸で計算を行なっていることから、Fig. 6 の渦点に集約した場合は異なり、局部波成分についても、 $x=0$ で不連続を生じていない。また、(b)は、右舷の渦糸端点での値であるが、 $x=0$ 付近の谷部での微係数が小さくなり、その位相が(a)に比べて下流側にズレている様子が分かるが、これは後の Fig. 8 にも示すように、ケルビン・パターン¹⁾の拡がりによるものである。また、(a)と同様 $x=0$ で不連続は生じていな

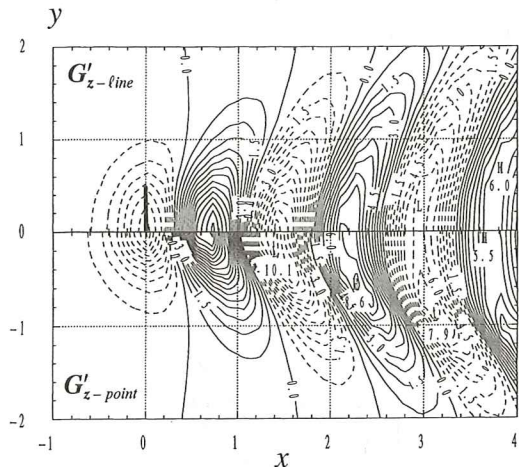


Fig. 8 Contours of z -derivatives of Green function in comparison between line vortex and point vortex in the case of $F_n=0.5, f=0.25$ on $z=-f$.

い。これは、渦糸モデルの場合(1)式からも分かるように、端点 $y = \eta_1$ を含む x 軸に平行な直線上では $\theta_1 = 0, \pi$ の値を取って、 $\omega_1^* = k_0(x - \xi) \sec \theta$ となり、 A_1 に関する積分区間は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ か $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 、 B_1 については $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ もしくは上下限が一致するから、被積分関数の奇関数性によって、その端点からの寄与は局部波成分 A_1^* 、自由波成分 B_1^* とともに生じないことによるものであり、結果として図に現われている値は専ら反対舷の端点からの寄与 A_2^*, B_2^* を示している。

また、Fig. 7 は、渦糸を離散的な渦点に分割して表現した場合の近似度を調査した結果であり、分割数は $n=1, 2, 3$ 、分割方式にはセミ・サークルを採用したものである。この図の $n=1$ の場合が、Fig. 6 に示した単一の渦点に集約した場合に対応する。これを見ると、少なくともこの条件下では、単位長の渦糸を $n=3$ 分割程すれば、渦点近似によってもその微係数を良好に再現できることが分かる。換言すれば、今回提案する渦糸モデルを揚力面の核関数に採用することにより、単純計算でも 1 方向の分割数を $\frac{1}{3}$ に、総格子数としては都合 $\frac{1}{9}$ に減少させる得ることが期待できる。

Fig. 8 は、Fig. 5~7 に示してきたと同様、没水深度上 $z = -f$ なる面での z 方向微係数の値を、

渦糸モデルと渦点近似の場合について、等高線図の形で比較したものである。上面に渦糸、下面に $n=1$ の渦点の場合を示しており、両者ともケルビン・パターンとして得られているが、渦糸モデルの微係数は、渦点近似のそれに比べて、そのパターンが外側に伸長されている様子が現われている。

3. 運動量定理による抗力成分の算定

ここでは、水中翼に作用する抗力成分を運動量定理に基づいて求め、自由表面影響を考慮した際の誘導抵抗と造波抵抗の算定式について考える。

Fig. 9 に示すような領域に運動量定理を適用し、翼面 A_H に作用する水平面内の流体力 F を求めると、

$$F = - \iint_{A_H} p n dA = \iint_{A_V + A_F + A_\infty} \{q_n q + p n\} dA \dots\dots\dots(25)$$

となり、式中の n は境界に立てた単位法線ベクトルであり、流体領域内に向かうものとする。ここに、随伴渦面 A_V は自由渦面だから、その上下で圧力差 $p^{(+)} - p^{(-)}$ を生じないし、法線流速 q_n もゼロである。また、自由表面 A_F では、明らかに $p = q_n = 0$ であるから、検査面 A_V, A_F 上での積分は消失し、結局、上下流、左右舷、底面に亘る検査面 A_∞ の運動量の出入りによって、流体力 F が決定さ

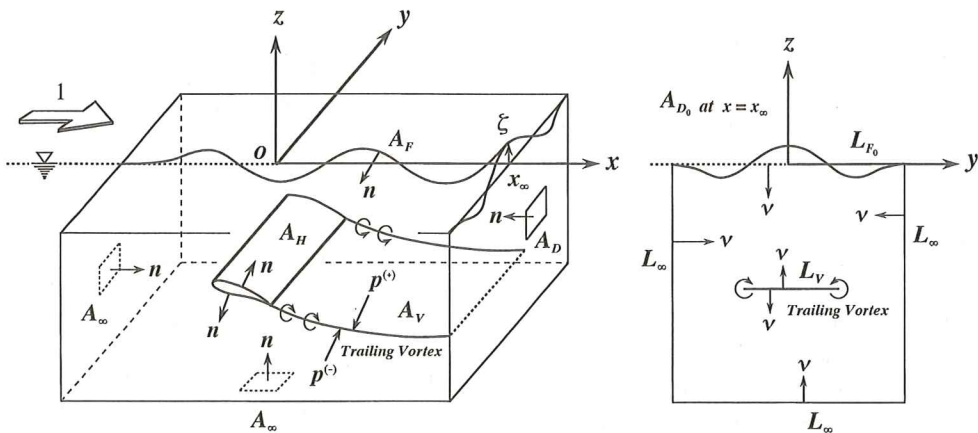


Fig. 9 Control surface applying the momentum theorem around hydrofoil.

れることになり、 x 方向の抗力成分について書くと、

$$F_x = \iint_{A_\infty} \left\{ q_n(1 + \phi_x) - \left(\kappa_0 z + \phi_x - \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2} \right) n_x \right\} dA \quad \dots\dots\dots(26)$$

のようになる^{12)Eq.(A-4)}。ここに、検査面 A_∞ の5面を、それぞれ無限遠方を取れば、自由波と随伴渦が残る下流検査面 A_D のみが寄与することになり、流場の連続条件や水面変位に関する若干の計算の後、抗力成分は2次の流体力として生ずることになり、

$$F_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\phi_y^2 + \phi_z^2 - \phi_x^2 \right]_{x=-\infty} dy dz + \frac{1}{2\kappa_0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x^2 \Big|_{z=0} dy \quad \dots\dots\dots(27)$$

によって算定できる^{12)Eq.(A-17)}。式中の第2項が水面変位の影響を表わしていることから、積分は静止水面以下の下流検査面 A_{D_0} について行なえばよい。ここに、攪乱速度ポテンシャル ϕ を

$$\phi = \phi_r + \phi_w \quad \dots\dots\dots(28)$$

のように、剛壁条件を満たす渦成分 ϕ_r と波動成分 ϕ_w に分ける。ただし、 ϕ_r については $x \rightarrow \infty$ では翼面渦の影響は消失し、随伴渦のみによって支配されるから、 yz 面内の2次元運動となり、 x 方向の速度成分 ϕ_{rx} は生じない。よって、 ϕ_r は連続条件として

$$\nabla_2^2 \phi_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_r = 0 \quad (\text{on } A_{D_0}) \quad \dots\dots\dots(29)$$

のような2次元のラプラス方程式を満たすことになる。

したがって、 $x \rightarrow \infty$ での下流検査面 A_{D_0} で、 ϕ_r と ϕ_w を分解して(27)式を書き直すことにより、 F_x は、

$$F_x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi_{ry}^2 + \phi_{rz}^2 \right) dy dz + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi_{ry} \phi_{wy} + \phi_{rz} \phi_{wz} \right) dy dz + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi_{wy}^2 + \phi_{wz}^2 - \phi_{wx}^2 \right) dy dz + \frac{1}{2\kappa_0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{wx}^2 \Big|_{z=0} dy \quad (\text{for } x \rightarrow 0)$$

$$\equiv F_{x_1} + F_{x_2} + F_{x_3} + F_{x_4} \quad \dots\dots\dots(30)$$

となる。ここに、第1項が誘導抵抗、第3、4項が造波抵抗、第2項が両者の干渉成分を表わす。 $F_{x_3} + F_{x_4}$ については、波動ポテンシャル ϕ_w の特性として $x \rightarrow \infty$ では局部攪乱波の影響が消失することから、その漸近挙動が、後続自由波の振幅関数 $C(\theta), S(\theta)$ を介して、

$$\phi_w \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ C(\theta) \sin(\kappa_0 \bar{\omega} \sec^2 \theta) - S(\theta) \cos(\kappa_0 \bar{\omega} \sec^2 \theta) \right\} e^{\kappa_0 z \sec^2 \theta} d\theta \quad \dots\dots(31)$$

のように記述できるため、Parseval の等式などを用いて積分を実行することにより、周知のように、

$$F_{x_3} + F_{x_4} = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ C(\theta)^2 + S(\theta)^2 \right\} \cos^3 \theta d\theta \quad \dots\dots(32)$$

として求め得る^{14)Eq.(A-23)}。そこで、以下 F_{x_1} と F_{x_2} について考える。

まず、 F_{x_1} については Newnan の教科書¹³⁾にある無限流体中の場合に倣って、渦成分に関する2次元の連続条件(29)式とガウスの発散定理を用いることにより、Fig. 9の右側に示す下流検査面 A_{D_0} での面積分が、

$$2F_{x_1} = \iint_{A_{D_0}} \nabla_2 \cdot \left(\phi_r \nabla_2 \phi_r \right) dA = - \int_{L_V + L_{F_0} + L_\infty} \phi_r \frac{\partial \phi_r}{\partial \nu} dl = - \int_{L_V} \left(\phi_r^{(+)} - \phi_r^{(-)} \right) \frac{\partial \phi_r}{\partial z} dy + \int_{L_{F_0}} \phi_r \frac{\partial \phi_r}{\partial z} dy - \int_{L_\infty} \phi_r \frac{\partial \phi_r}{\partial \nu} dl \quad \dots\dots\dots(33)$$

のように、周囲の線積分に変換して書き表わすことができる。式中の ∇_2 は、 $\nabla_2 = j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ で定義される yz 面内での2次のな勾配演算子、 ν は同じく yz 面内で立てた流体領域に向かう法線ベクトルであり、第1項に現われる上添字の(+), (-)は、それぞれ渦面の上面、下面での値を示すものである。ここに、第2項は ϕ_r が正鏡像渦を考慮しており、静水面 L_{F_0} 上では、剛壁条件

$$\left. \frac{\partial \phi_r}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \dots\dots\dots(34)$$

を満足するからゼロとなり、第3項の L_∞ 上での

積分は、攪乱流の遠方での減衰挙動により消失するから、結局、第1項の随伴渦面 L_V 上の積分のみで表わされることになる。ここに、渦成分による攪乱ポテンシャル ϕ_r を、

$$\phi_r = \phi_{r-1} + \phi_{r-11} \dots\dots\dots(35)$$

のように、翼面渦による没水成分 ϕ_{r-1} と水面に関する正鏡像を表わす ϕ_{r-11} に分離して表記する。このとき、鏡像項 ϕ_{r-11} については L_V 上でのポテンシャルの跳躍を生じないのに対し、没水項 ϕ_{r-1} については、上下面間での跳びがそのダブレット密度に相当し $\phi_{r-1}^{(+)} - \phi_{r-1}^{(-)} = \Gamma(y)$ となることから、(33)式の F_{X_1} は、

$$\begin{aligned} F_{X_1} &= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \frac{\partial \phi_{r-1}}{\partial z} \Big]_{z=-\infty}^f dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \frac{\partial \phi_{r-11}}{\partial z} \Big]_{z=-\infty}^f dy \\ &\equiv F_{X_{r-1}} + F_{X_{r-11}} \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

のように、翼固有の誘導抵抗 $F_{X_{r-1}}$ と、水面の正鏡像効果による $F_{X_{r-11}}$ の和で求め得ることが分かる。ここに、両項はそれぞれ随伴渦強さのスパン方向分布 $\Gamma(y)$ と後流渦面上での吹き降り速度の $\frac{1}{2}$ の積から求められ、後者は半無限長の随伴渦による後縁での吹き降しに相当することから、2次元的な翼断面における Kutta-Joukowski の定理に基づく抗力をスパン方向に積分することによって求まる誘導抵抗を表わすことになる。

一方、干渉成分の F_{X_2} についても同様な手法を適用することにより、

$$\begin{aligned} F_{X_2} &= \iint_{A_{D_0}} \nabla_2 \cdot (\phi_w \nabla_2 \phi_r) dA \\ &= - \int_{L_V + L_{F_0} + L_w} \phi_w \frac{\partial \phi_r}{\partial \nu} dl \\ &= - \int_{L_V} (\phi_w^{(+)} - \phi_w^{(-)}) \frac{\partial \phi_r}{\partial z} dy \\ &\quad + \int_{L_{F_0}} \phi_w \frac{\partial \phi_r}{\partial z} dy - \int_{L_w} \phi_w \frac{\partial \phi_r}{\partial \nu} dl \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

となり、第1項は随伴渦面上で波動ポテンシャル ϕ_w に跳びがないことから消失し、第2項は F_{X_1} と同様、渦成分に対する正鏡像効果により、また第3項は、やはり遠方での減衰挙動により共に消

失する。結果として

$$F_{X_2} = 0 \dots\dots\dots(38)$$

となり、少なくとも渦成分が剛壁条件を満たす限り、誘導抵抗と造波抵抗の干渉による抵抗成分は存在しないことが分かる。

以上により、水中翼に作用するポテンシャル的な抗力 F_X は、(36)式と(32)式の単純和により、

$$\begin{aligned} F_X &= \left[F_{X_{r-1}} + F_{X_{r-11}} \right]_{Eq.(36)} + \left[F_{X_w} \right]_{Eq.(32)} \\ &\equiv F_{X_i} + F_{X_w} \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

によって算定することができ、改めて $F_{X_{r-1}} + F_{X_{r-11}}$ で表わされる誘導抵抗を F_{X_r} 、造波抵抗を F_{X_w} と記したものである。一方、造波抵抗に誘導抵抗の鏡像成分を加えた $F_{X_{r-11}} + F_{X_w}$ は、水面影響による抵抗成分として捉えることもできる。

4. 渦糸による振幅関数と造波抵抗

ここでは、渦糸モデルを採用した場合の自由波の振幅関数を求め、それを用いた造波抵抗の計算法について述べる。

(4)式に示す渦点のグリーン関数 G'_{point} に対応して生成される波の後流での漸近挙動は、自由波の複素振幅関数 $A(\theta) = C(\theta) + iS(\theta)$ を導入することにより、

$$\begin{aligned} \zeta_{point} &= - \left. \frac{\partial G'_{point}}{\kappa_0 \partial x} \right]_{z=0} \\ &\sim \operatorname{Re} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A_{point}(\theta) e^{i\kappa_0 \sigma \sec^2 \theta} d\theta \right] \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

のように、その複素共役によって表記できるから、渦点に対するそれ A_{point} は、

$$A_{point}(\theta) = -4i\kappa_0 t_\eta e^{-\kappa_0 f \sec^2 \theta + i\kappa_0 \sigma' \sec^2 \theta} \sec^4 \theta \dots\dots\dots(41)$$

で与えられる。ここに、 $\eta = 0$ なる中心線に関する左右対称条件を入れて、渦対としての振幅関数 A_{pair} を求めると、

$$\begin{aligned} A_{pair}(\theta) &= A_{point}(\theta) \Big]_{\eta=\eta} + A_{point}(\theta) \Big]_{\eta=-\eta} \\ &= -8i\kappa_0 t_\eta \sec^4 \theta e^{-\kappa_0 f \sec^2 \theta + i\kappa_0 \sigma \sec^2 \theta} \\ &\quad \times \cos(\kappa_0 \eta \tan \theta \sec \theta) \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

となる。これを区分的に $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ 間で積分することにより、渦糸の振幅関数 A_{tine} は、

$$A_{tine}(\theta) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} A_{pair}(\theta) d\eta$$

$$= -8it_\eta \cot \theta \sec^3 \theta e^{-\kappa_0 f \sec^2 \theta + i\kappa_0 \xi \sec \theta}$$

$$\times \left\{ \sin(\kappa_0 \eta_2 \tan \theta \sec \theta) - \sin(\kappa_0 \eta_1 \tan \theta \sec \theta) \right\} \quad (43)$$

のように求まり、素成波の伝播方向 θ に関して対称に得られている。これは、(40)式を積分することにより求めた渦糸の振幅関数に、対称条件を付加することによっても求め得る。

これを用いて、揚力面を構成した場合の振幅関数 $A(\theta)$ は、その左右対称性により、片舷の渦格子 $\frac{N}{2}$ 個に亘る総和を取って、

$$A(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left[\Gamma_n \sum_{k=1,3} A_{tine|n,k}(\theta) \right] \quad (44)$$

のようにして求め得る。ここに $\sum_{k=1,3}$ は、 n 番目の格子に対して、Fig. 2 に示すように前縁 ($t_\eta|_{k=1}=1$) と後縁 ($t_\eta|_{k=3}=-1$) の 2 本の横渦糸についての和を取ることを意味し、 $k=2, 4$ の縦渦糸からの寄与はない。このときの造波抵抗 F_{Xw} は、(32)式に対称条件を入れて、直ちに

$$F_{Xw} = \pi \int_0^\infty |A(t)|^2 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad (45)$$

によって計算できる。この t に関する積分表記は、グリーン関数の自由波成分を求めた際と同様な $t = \tan \theta$ なる変数変換を施した結果であり、実際の積分もこれによって行なった。

また、振幅関数 $A(\theta)$ の計算に際しては、渦糸モデルの場合(43)式からも分かるように、 $\cot \theta$ なる因子のため数値的には $\theta=0$ で破綻する。これについてはグリーン関数の計算と同様、 $\theta=0$ 周りの展開形を考えれば、積分そのものは特異性を生じることなく処理できる。

実際、(43)式に示す渦糸による A_{tine} を θ に関して展開すれば、

$$A_{tine}(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} -8i\kappa_0 \delta\eta$$

$$\times \left\{ 1 + \left(1 + \kappa_0 f - \frac{\kappa_0^2 \bar{\eta}^2}{2} - \frac{i}{2} \kappa_0 \xi \right) \theta^2 + \dots \right\} \cdot e^{-\kappa_0 f + i\kappa_0 \xi} \quad (46)$$

$$\text{但し、} \bar{\eta} = \sqrt{\frac{\eta_1^2 + \eta_1 \eta_2 + \eta_2^2}{3}}$$

のようになり、端点 η_1, η_2 での減算効果により、 $\theta=0$ でも発散することなく確定し、渦長 $\delta\eta$ に比例して求まる。

次に、(45)式の t ベースで F_{Xw} を計算する際の、数値的終端 T_∞ を押さえることを考える。渦糸モデルによる波振幅関数 $A(t)$ の挙動は、(43)式の振動因子を除いた振幅を 4π で除した量で測ることができ、その絶対値は高々

$$A(t) \sim \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} e^{-\kappa_0 f(1+t^2)} \quad (47)$$

であるから、対応する F_{Xw} の被積分関数の $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動に関する検討から、抵抗値に対する要求精度を ε とするとき、その数値的終端

T_∞ ⁸⁾ 付録 A は、

$$T_\infty = \sqrt{\frac{1}{2\kappa_0 f} \ell \log e \left(\frac{1}{\pi \kappa_0 f \varepsilon T_\infty^2} \right)} \quad (48)$$

を繰り返し計算によって求めればよい。

5. 高速極限での造波抵抗と誘導速度場

ここでは、高速極限での造波抵抗の挙動と誘導速度場の表現について考える。超高速域では $F_n \rightarrow \infty$ となって、生成波の波長に対してコード長は無視し得ることから、揚力面を揚力線に集約して造波抵抗を計算できる。

そのとき、揚力線理論に基づく振幅関数 $\tilde{A}(\theta)$ は、左右対称条件を付加すれば、(42)式に示す渦対のそれ A_{pair} において $t_\eta=1$ とし、スパン方向の循環分布 Γ を考慮して積分することにより、

$$\tilde{A}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^b \Gamma(\eta) A_{pair}(\theta) \Big|_{t_\eta=1} d\eta$$

$$= -\frac{2i\kappa_0}{\pi} \sec^4 \theta e^{-\kappa_0 f \sec^2 \theta + i\kappa_0 \xi \sec \theta}$$

$$\times \int_0^b \Gamma(\eta) \cos(\kappa_0 \eta \tan \theta \sec \theta) d\eta \quad (49)$$

によって求めることができる。ここに、 $\xi=0$ と置

けば y 軸上の揚力線に集約した場合の振幅関数を計算したことになり、結果は西山のそれ^{4)Eq.(22)}に一致する。ただし、集約位置を $\frac{1}{4}$ 弦長点にシフトしても振幅関数の絶対値には影響しないことから、(45)式で計算する造波抵抗値そのものについては同一の結果を得る。ここでも、高速での挙動を調査するために(49)式で $\zeta=0$ とし、 $k=\kappa_0 \tan^2 \theta$ として変数変換した後、 $\kappa_0 \rightarrow 0$ とすることにより、振幅関数は漸近的に

$$\tilde{A}(k) \underset{(F_{N \rightarrow \infty})}{\sim} \frac{2i}{\pi \kappa_0} k^2 e^{-k\zeta} \int_0^{\frac{b}{2}} \Gamma(\eta) \cos k\eta d\eta \quad \dots\dots(50)$$

によって求め得る。このとき、対応する高速極限での造波抵抗は、(45)式において、やはり $k=\kappa_0 t^2$ と置き、 $\kappa_0 \rightarrow 0$ とすることにより、

$$F_{Xw} \underset{\kappa_0 \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi \kappa_0^2}{2} \int_0^\infty \frac{|\tilde{A}(k)|^2}{k^3} dk \quad \dots\dots(51)$$

によって算定できるから、(50)式の $\tilde{A}(k)$ を代入した後、積分の順序を交換することにより、

$$F_{Xw} \underset{\kappa_0 \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(\eta) d\eta \times \int_0^\infty k e^{-2k\zeta} \cos ky \cos k\eta dk \equiv \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \Psi(y) dy \quad \dots\dots(52)$$

となり、 $\Gamma(y)$ の対称性を用いて、全スパンに亘る積分で表現したものである。ここに、 $\Psi(y)$ については、

$$\Psi(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\int_0^\infty e^{-2k\zeta} \sin k(y-\eta) dk \right) d\eta \quad \dots(53)$$

のように書くことができ、括弧内の k に関する積分を解析的に実行し $\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+4f^2}$ とした後、 η に関して部分積分することにより、翼端では $\Gamma(\pm \frac{b}{2})=0$ であるから、

$$\Psi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{y-\eta}{\sqrt{(y-\eta)^2+4f^2}} d\eta = \left. \frac{\partial \phi_{r-II}}{\partial z} \right]_{z=-\infty}^{\dots} \quad \dots\dots(54)$$

となり、その被積分関数が鏡像位置に配された

$\Gamma(\eta)$ の微係数に相当する強さを有する随伴渦の、 $\sqrt{(y-\eta)^2+4f^2}$ を動径とする 2 次元の誘導速度とその z 方向の方向余弦の積として得られることから、正鏡像項 ϕ_{r-II} の随伴渦による後流渦面上での誘導速度の z 成分に相当するものであることが分かる。

したがって、超高速域での造波抵抗は、(36)式の第 2 項 F_{Xr-II} と比較することにより、

$$F_{Xw} \underset{\kappa_0 \rightarrow 0}{\sim} \int_0^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \left. \frac{\partial \phi_{r-II}}{\partial z} \right]_{z=-\infty}^{\dots} dy = -2F_{Xr-II} \quad \dots\dots(55)$$

のように、鏡像項による抗力の逆符号の 2 倍の値を取ることが分かり^{4)Eq.(24)}、2 次元の場合と異なって下流に随伴渦が流出することから、高速極限においても造波抵抗がゼロになることはない。ここに、 F_{Xw} は(51)式より明らかに正値を取ることから、鏡像項のみによる抗力 F_{Xr-II} は負となって推力を生じることになり、それによる没水渦面上への誘導速度は平均的に吹き上げとして作用することが分かり、Fig. 14 に示す通りである。

また、(55)式の結果は見方を変えれば、高速極限での造波抵抗の特性は、 Γ の没水渦に対して 2Γ の逆鏡像渦を配した場合の誘導抵抗と等価であることを教えており、ここでの流場には元々 Γ の正鏡像渦が存在することから、対応する速度場は、差し引き強さ Γ の逆鏡像を配することにより実現できると考えられる。実際、(2)式の自由表面条件式 $[F]$ は、 $\kappa_0 \rightarrow 0$ なる高速極限では第 1 項が支配的となって、

$$[F]_{\kappa_0 \rightarrow 0} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(u_r + \frac{\partial G'_{point}}{\partial x} \right) \right]_{z=0} = 0 \quad \dots\dots(56)$$

を満たせばよいことになり、波動的な造波グリーン関数 G'_{point} を考慮することなく、静止水面に関する逆鏡像渦を考慮すれば $u_r]_{z=0}=0$ を満たすことから、自動的に(56)式を満足させ得る。このことから、逆鏡像モデル¹⁴⁾による

$$v \underset{\kappa_0 \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \Gamma_n \int_{c_n} \nabla_P \times \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) t_r ds \quad \dots\dots(57)$$

のような速度場^{8)Eq.(14)}が、高速極限での速度場を与えることになり、(55)式に示す後流積分による造

波抵抗特性から検討した結果と符合する。一方、対応する Γ 分布は、この揚力面を解くことにより求め得る。

6. 数値計算結果及び考察

ここでは、2章に示した渦糸モデルによる造波グリーン関数を核関数に採用することにより、定常揚力面を数値解析した結果について述べる。本論では、浅深度域における渦糸モデルによるグリーン関数の有効性と、自由表面下での抗力成分の算定を主眼とするため、計算は $\Lambda=2$ の矩形翼を対象に行ない、アスペクト比に対する依存性の把握と西山の結果⁴⁾との比較のために、 $\Lambda=6$ の場合についても併せて計算を実施した。

数値解析に当っては、前報³⁾と同様、翼面を離散的な N 個の格子状の渦輪で表現し、分割にはコード、スパン方向ともに *cosine* 的に端部に行くほど自動的に細分化できるセミ・サークル方式を用いた。このとき、各パネルでの渦糸強さ Γ_n は、翼面上での境界条件 $[H]$ から、

$$[H] \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \left[\Gamma_n \sum_{k=1}^4 \left\{ w_{\Gamma_{line}} + \frac{\partial G'_{line}}{\partial z} \right\}_{z_n=-f} \right] = -a \quad \dots(58)$$

を満足するように、決定すればよい。ここに、 $w_{\Gamma_{line}}$ は正鏡像を考慮した渦糸の誘導速度の z 成分であるから Biot-Savart の法則⁸⁾Eq.(42) によって、 $\frac{\partial G'_{line}}{\partial z}$ は造波グリーン関数による波動成分を表わすから(11)式によって計算でき、それぞれ(28)式の ϕ_r と ϕ_w に対応する。また、 $\sum_{k=1}^4$ は、Fig. 2 に示すような周囲4辺の直線渦糸を時計回りに連結することを意味するが、後者の波動成分については $k=2, 4$ の x 軸に平行な径路では $t_r=0$ となり、波を生じないから計算は不要である。一方、翼後縁では Kutta 条件 $[K]$ の成立を要求されるから、後縁パネルの渦輪と等しい強さの随伴渦を流出させて解くことになる。ただし、ここでは線型化の仮定により随伴渦の変形は考慮しないため、随伴渦は純粋な縦渦成分となって波動項を生じないから、数値計算する上でも好都合である。

揚力 F_z については、3章に示した抗力成分の

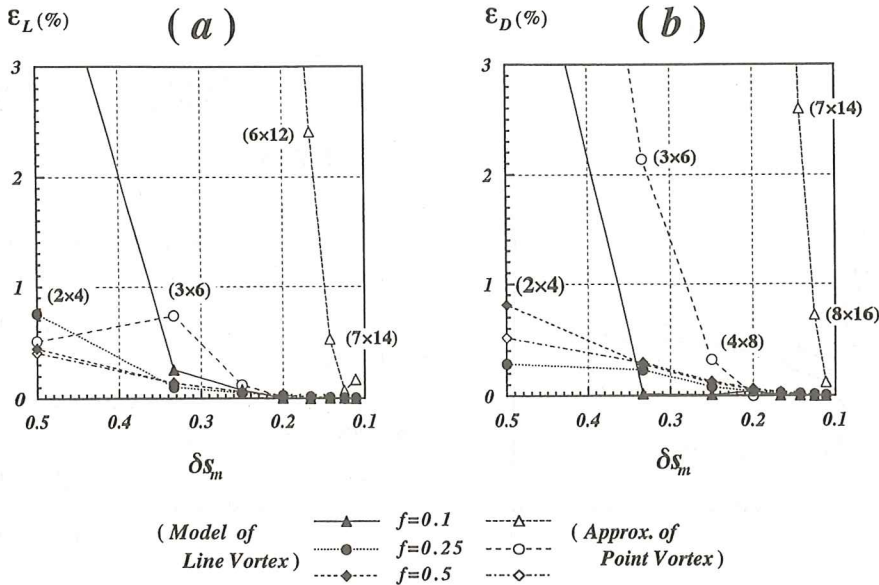


Fig. 10 Comparison of accuracy for lift and drag calculated by line vortex and point vortex versus mean lattice length on the rectangular wing with $\Lambda=2$ at $F_n=1$ in the case of $f=0.1, 0.25, 0.5$. [(a) ϵ_L , (b) ϵ_D]

ように運動量定理に基づく後流積分によって陽に造波成分を分離することはできないから、前報と同様^{8)Eq.(39)}、翼面上の圧力積分によって、そのポテンシャルの跳躍から、

$$F_z = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \Big|_{x=\frac{1}{2}} dy \dots\dots\dots(59)$$

のように、循環に相当する後縁に沿った渦分布 Γ をスパン方向に積分することによって、自由表面影響を含んだ形で求め得る。一方、抗力成分 F_x についても、離散的に得られた Γ 分布を用いて(39)式によって計算できる。ここに、得られた揚力 F_z と抗力 $F_x = F_{x_i} + F_{x_w}$ は、 $\rho U^2 c^2$ ベースの無次元値であるから、これを翼面積を S として $\frac{1}{2} \rho U^2 S$ を規準に測った通常の意味での揚力係数 C_L や抗力係数 C_D 等に換算するには、アスペクト比 Λ の矩形翼に対しては、

$$\left. \begin{aligned} C_L &= \frac{2}{\Lambda} F_z \\ C_D &= \frac{2}{\Lambda} F_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

のようにすればよく、以下に示す計算例の整理もこれによった。ただし、この場合の抗力 C_D は、(39)式で示したような誘導抵抗 C_{D_i} と造波抵抗 C_{D_w}

の和で得られるポテンシャル的な抗力を意味し、流体の粘性に起因する抗力は含まない。本論での抗力の定義については、以下も同様とする。

なお、線型揚力面の場合(58)式の翼面条件 $[H]$ から分かるように、渦輪強さ Γ は、迎角 α に比例して得られ、結果として揚力 C_L は α に、抗力 C_D は α^2 に比例する量として求まることになるから、それぞれに対する傾斜として、 $C_{L\alpha}$ 、 $C_{D\alpha^2}$ を、

$$\left. \begin{aligned} C_{L\alpha} &= \frac{dC_L}{d\alpha} \\ C_{D\alpha^2} &= \frac{dC_D}{d\alpha^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

によって定義しておく。

6. 1 渦糸モデルによる計算精度の検討

本計算に先立ち、 $\Lambda=2$ の矩形翼を対象に渦糸モデルを採用した場合と渦点近似を施した場合について、揚力、抗力それぞれについて計算精度の比較を行なった。Fig. 10 に示すのは、 $F_n=1$ に対する結果であり、検討した没水深度は浅深度域を対象に $f=0.1, 0.25, 0.5$ の3種である。

(a)は、分割数を種々変化させたときの揚力係数 C_L の収束状況を比較したものである。この際の格

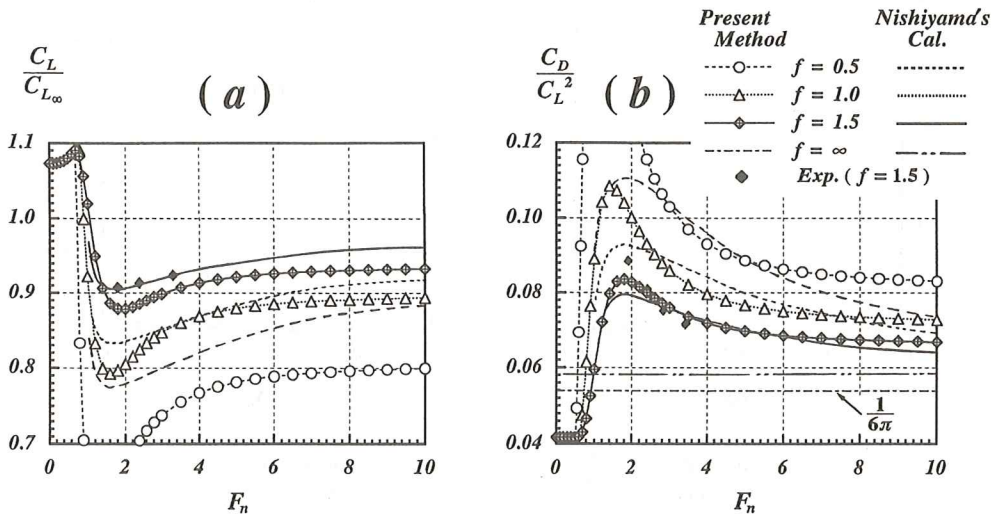


Fig. 11 Comparison of the hydrodynamic forces calculated by present method and Nishiyama's one versus Froude's number for the rectangular wing with $\Lambda=6$ in the case of $f=0.5, 1.0, 1.5$. [(a) C_L , (b) $\frac{C_D}{C_L^2}$]

子は、コード、スパン方向を $N \times 2N$ 分割で生成し、横軸には平均格子長 $\delta s_m (= \frac{1}{N})$ を、縦軸には最も細かい 9×18 分割した場合の渦糸モデルによる揚力値に対する相対誤差を

$$\varepsilon_L = \frac{C_L - C_L]_{9 \times 18}}{C_L]_{9 \times 18}} \times 100 \dots\dots\dots(62)$$

のように百分率表示した ε_L を採っている。同図を見ると、3種の中では深度が深い $f=0.5$ の場合は、粗い分割でも誤差そのものが小さく、渦糸モデルによっても渦点近似によっても同程度の精度で揚力値を得られるようであるが、深度が浅くなると、その優劣が明白に現われ、同じ分割数では渦糸モデルの方が明らかに高精度を得られるようである。特に $f=0.1$ の超浅深度の場合には、渦糸モデルの場合 3×6 分割すれば誤差を0.3%程に押しえられるのに対し、渦点近似で同程度の精度を得るには 9×18 分割に細分化する必要がある、2.4節で Fig. 6 の結果から類推した帰結と符合する。

一方(b)は、同様な検討を抗力 C_D について行った相対誤差 ε_D

$$\varepsilon_D = \frac{C_D - C_D]_{9 \times 18}}{C_D]_{9 \times 18}} \times 100 \dots\dots\dots(63)$$

に対するものである。結果は、誤差の絶対値そのものも揚力とほぼ同程度であり、傾向も同様であ

るが、揚力の場合差の現われなかった $f=0.25$ の場合でも、渦糸モデルの優位性が認められる。

6.2 高速域での西山の結果との比較

Fig. 11 は、アスペクト比の高い $\Lambda=6$ の矩形翼について、高速域での西山⁹⁾の計算値と実験値と比較することにより、本計算法により算定した渦糸モデルによる揚力や抵抗値の妥当性を検討した結果であり、ある程度深度の深い $f=1.5, 1.0, 0.5$ の場合を対象にしている。

(a)は、揚力値 $\frac{C_L}{C_{L\infty}}$ をフルード数ベースに置点したものであり、無限流体中との比で自由表面影響を表わしている。格子分割としては、本論の結果が 6×12 分割で、比較した西山の計算は揚力線理論的な取り扱いで、スパン方向に7個の標点を取って行なわれた。この図から、 $f=1.5$ と 1.0 については、両者の結果は概ね一致しているとみてよい。特に、 $f=1.5$ の場合については、対応する実験値との一致度も良好であることから、本解析法の妥当性を確認した。しかし、深度の浅い $f=0.5$ の場合になると、両者の差が広がり、西山の結果は、高速域での揚力値を過大評価するようであり、揚力線的な取り扱いの限界と考えられるが、今後実

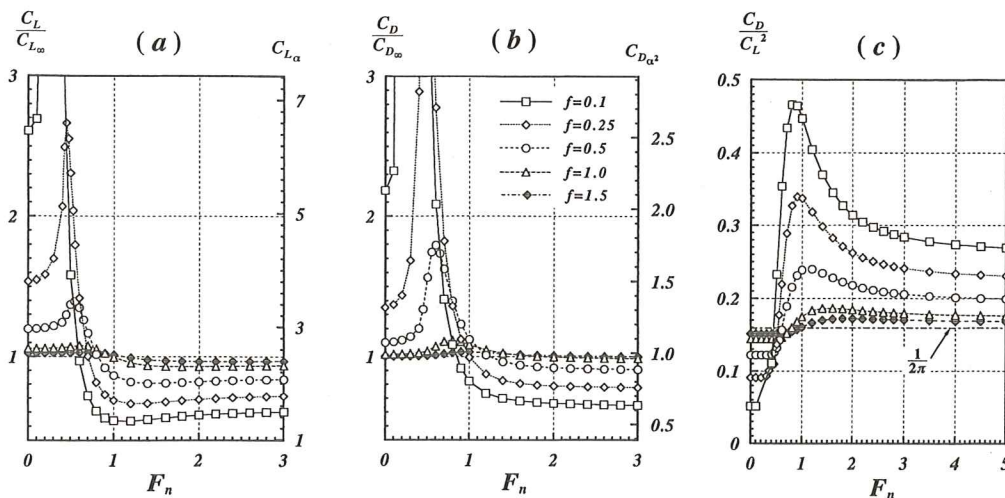


Fig. 12 Hydrodynamic forces of rectangular wing with $\Lambda=2$ versus Froude's number for the various submerged depth in the division of 6×12 . [(a) C_L , (b) C_D , (c) $\frac{C_D}{C_L^2}$]

験的にも検証する必要がある。

一方(b)は、同様な比較を翼の流力性能の指標 $\frac{C_D}{C_L^2}$ について行なったものである。まず、両者の無限流体中の値を見ると、本論の結果が理論値の $\frac{1}{\pi A}$ にほぼ等しく得られているのに対し、西山の結果は多少高目の値を示しており、本論の結果は、揚力面が高精度に解かれていることを示している。自由表面影響を考慮した場合には、やはり(a)と同様 $f=1.5$ については、両解析法の一致度も、また実験値との対応も良好である。ただ、(a)に示す揚力傾斜の結果と異なって、深度の浅い $f=1.5$ や 0.5 の場合についても、フルード数が $2 \leq F_n \leq 6$ の中程度の速度域では、若干本論の結果が大き目に生ずるものの、両者の結果は概ね一致している。これは、同図が抵抗値と揚力値の相対比を表わすから、両解法の差異が相殺されたものと考えられるが、両者の無限流体時に対する推定精度が異なることもあって、これ以上の議論は差し控える。ただし、浅い $f=0.5$ については、それより低速側や高速側では、両者の結果は離れる傾向にあり、西山の方法は、この $\frac{C_D}{C_L^2}$ 値を過小評価するようであり、同図(a)で揚力を過大評価した結果であろう。

以上(a),(b)の結果から、深度がある程度深い場合には、揚力線的な取り扱いによっても流体力を推定できるが、深度が浅くなれば、たとえアスペクト比がこのように大きな場合でも限界があり、本論で示した揚力面による取り扱いが必要になると考えられる。

6. 3 流体力の特性

Fig. 12 は、アスペクト比 $A=2$ の矩形翼に作用する流体力の特性について検討した結果である。計算は、2章で求めた渦糸モデルによるグリーン関数を用いて行ない、没水深度 $f=0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 1.5$ の5状態について、コード c を規準にしたフルード数 $F_n (= \frac{U}{\sqrt{gc}})$ ベースに置点したもので

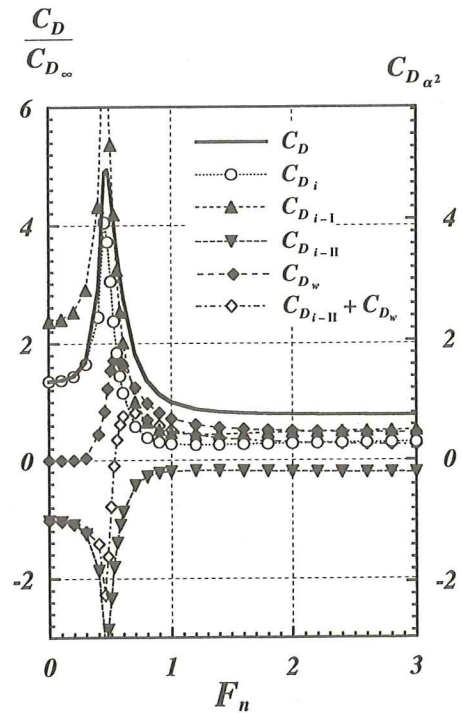


Fig. 13 Components of drag C_D of rectangular wing with $A=2$ versus Froude's number in the case of $f=0.25$.

ある。格子分割は、浅深度域を含めて扱うことから、全て 6×12 分割の計72パネルで行なったものである。

(a)が揚力 C_L , (b)が抗力 C_D に対する結果であり、左側の縦軸が無限流体中との相対比で自由表面影響を表わしたものであり、右側のそれには(6)式で定義した揚力、抗力それぞれの迎角 α や α^2 に対する傾斜を示している。これらの結果から、抗力に及ぼす自由表面影響のフルード数に対する依存性については、低速でピーク値を取るものの、高速では(a)の揚力のようにボトム値を取ることなく一様に超高速域での一定値に収束することが分かる。また、没水深度に対しては、深度が浅くなる程、ピーク値と高速での漸近値との幅が広がって、自由表面影響を顕著に受け、そのピークを取るフルード数については、深度が浅くなるにつれてより低速側で生じることも、前報⁹⁾で揚力値に

ついて述べたことと同様である。

一方(c)は、 $\frac{C_D}{C_L^2}$ に対する結果であり、図中、一点鎖線で示すのが、揚力線理論による結果 $\frac{1}{\pi\Lambda}$ であり、対応する本論での無限流体中の数値解もこれに一致する。これを見ると、フルード数1の辺りでピークを取るものの、 C_D のカーブと同様、高速域ではボトム値を取ることなく速やかに一定値に

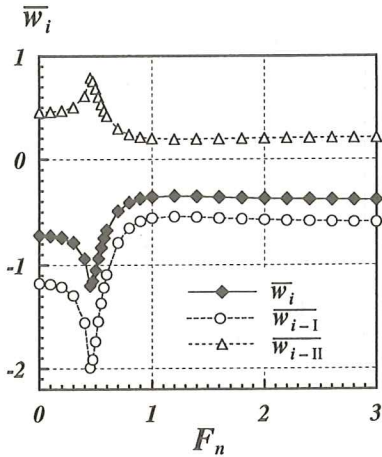


Fig. 14 Components of the down-wash \bar{w}_i averaged over span on the trailing vortex at far-downstream for the rectangular wing with $\Lambda=2$ versus Froude's number in the case of $f=0.25$.

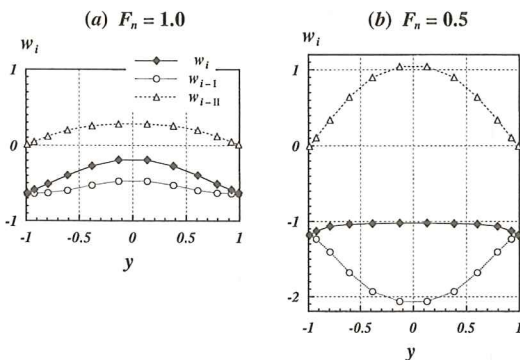


Fig. 15 Components of spanwise distributions of down-wash w_i on the trailing vortex at far-downstream for the rectangular wing with $\Lambda=2$ in the case of $f=0.25$. [(a) $F_n=1$, (b) $F_n=0.5$]

収束する。また、速度域に依らず没水深度が浅いほど $\frac{C_D}{C_L^2}$ 値は大きく得られ、自由表面影響によって翼の流力性能が劣化することが分かる。ただし、フルード数 $F_n \leq 0.5$ の低速域では、逆に深度が浅い方がこの値が小さく、無限流体時よりも下がることから、正鏡像効果によって翼の流力性能が向上することになる。

6. 4 抗力の成分々離

Fig. 13 は、 $\Lambda=2$ の翼について Fig. 12 に示したフルード数 F_n ベースの抗力係数 C_D を成分毎に分離して表記したものであり、没水深度は $f=0.25$ である。これを見ると、正鏡像成分による誘導抵抗 $C_{D_{i-11}}$ は、フルード数全域に亘って負となって推力を生じており、誘導抵抗そのものは水面影響を考慮することにより減ぜられることが分かる。一方、造波抵抗 C_{D_w} は常に正值として生じ、高速域では確かに(55)式に示すように誘導抵抗の鏡像成分 $C_{D_{i-11}}$ の逆符号の2倍程度に得られている。結果として、両者の和 $C_{D_{i-11}} + C_{D_w}$ を水面影響による抵抗成分として捉えと、それは高速域では差し引き逆鏡像分の誘導抵抗を生じるのに対し、低速域では推力を生じることになる。西山⁴⁾Fig.11,12 は、これを造波抵抗と呼んでいるようである。

Fig. 14 は、同じく深度 $f=0.25$ について、フルード数ベースの平均吹き降り \bar{w}_i を成分に分離して示したものであり、結果は、 $x \rightarrow \infty$ における随伴渦面上での単位迎角当りの w_i 分布をスパン方向に亘って平均したものである。この図からも、正鏡像成分による誘導速度 w_{i-11} は吹き上げとして作用しており、全速度域に亘って没水渦による吹き降り w_{i-1} を減少させることが分かり、やはりピークは $F_n=0.5$ 辺りで生じている。

Fig. 15 は、Fig. 14 に示す吹き降しのスパン方向の分布形状を描いたものであり、(a)に $F_n=1$ 、(b)に $F_n=0.5$ の場合を示す。結果は(b)の $F_n=0.5$ の場合が、 w_{i-1} 、 w_{i-11} の両成分とも絶対値が大きく得られるようであり、結果として誘導抵抗も大きく生ずることになる。没水成分 w_{i-1} の分布形

状についても(a)と(b)では凹凸が逆に得られている。
 また、鏡像成分 w_{i-II} については、どちらの場合も
 翼端 $y = \pm 1$ でゼロになるようである。

6. 5 誘導抵抗

Fig. 16 は、誘導抵抗に対する検討を、同じく Λ

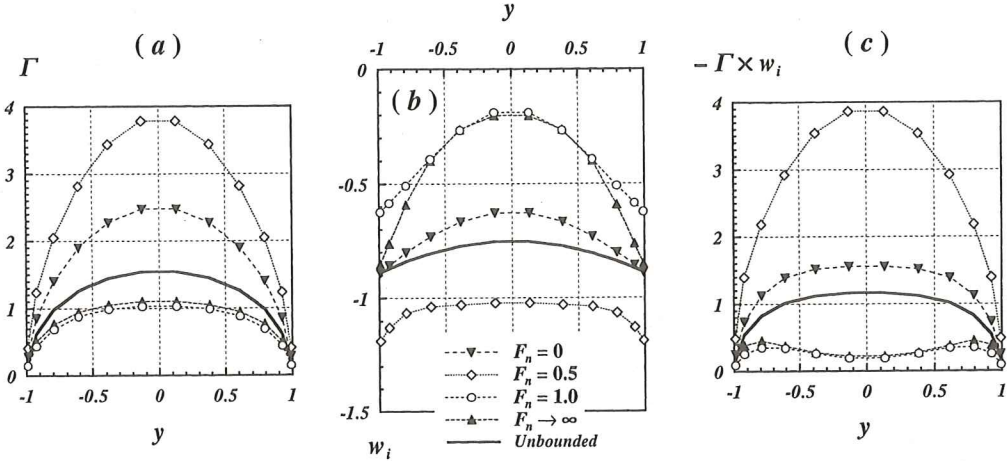


Fig. 16 Dependency of some spanwise distributions upon the Froude's number for the rectangular wing with $\Lambda=2$ in the case of $f=0.25$. [(a) circulation Γ , (b) down-wash w_i , (c) profile induced drag $-\Gamma w_i$]

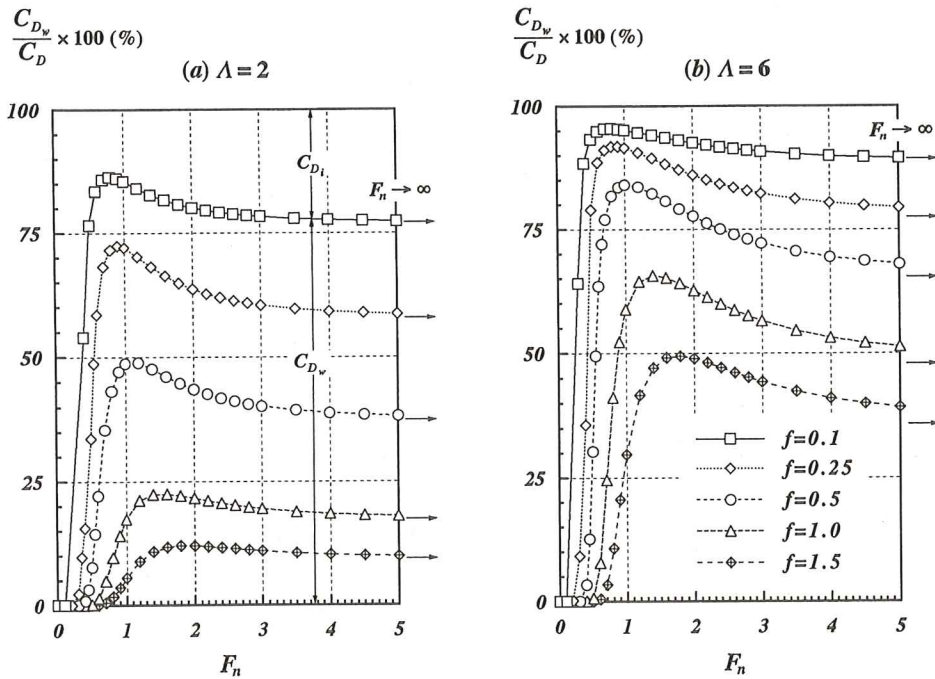


Fig. 17 Share of wave-making resistance C_{Dw} relative to the total drag C_D for the various submerged depth on rectangular wings. [(a) $\Lambda=2$, (b) $\Lambda=6$]

$=2$ の翼について行なったものであり、(a)は後縁パネルの渦糸強さに相当する循環 Γ 分布、(b)は Fig. 14, 15 と同様、後流渦面上での吹き降り w_i 分布のフルード数 F_n に対する依存性を示す。結果は全て迎角 α に対する傾斜を取ったものであり、深度 $f=0.25$ の場合である。また、(a)、(b)の積として得られる(c)の結果 $-\Gamma w_i$ はスパン方向の局所的な誘導抵抗の分布を示すものであり、それぞれ(a)の積分値が揚力、(c)の積分値が誘導抵抗に相当する。図中、太実線で示したものが水面の影響を考慮しない無限流体中の場合であり、(a)、(b)、(c)どの場合についても、この無限流体時を挟んでその絶対値は低速側では大きく、高速側では小さく得られている。また $F_n \rightarrow \infty$ の高速極限での分布は、(57)式に示したように、グリーン関数を考慮することなく逆鏡像渦を考慮した揚力面を解いた結果であり、どの場合も概ね $F_n=1$ の場合と等しく得られていることから、 $F_n=1$ 程度の速度域で、これら分布形状もほぼ高速極限値に漸近している様子が現われている。一方、剛壁近似が成立する低速極限 $F_n=0$ と $F_n=0.5$ の場合は、かなりの差が生じており、この辺りで生成波の波長が翼弦長と同程度になることもあって自由表面影響が顕著であることが分かる。これらの結果から、自由表

面影響によって、(a)の Γ 分布については無限流体時の楕円分布から、(b)の w_i 分布については、スパン方向に一定であるというそれぞれの極小誘導抵抗の条件から逸脱する様子がよく分かり、その傾向はやはり低速域で顕著である。

6. 6 造波抵抗

Fig. 17 は、Fig. 13 に示した全抗力 C_D のうち、造波抵抗 C_{D_w} の占める割合を百分率でフルード数 F_n ベースにプロットしたものであり、(39)式の結果から、その残りが誘導抵抗成分 C_{D_i} となる。

この図から、速度域によらず、没水深度が浅いほど明らかに造波抵抗の占める割合は大きくなり、その傾向はアスペクト比が大きいほど強まるようである。また、その割合は翼弦長ベースのフルード数が1の辺りで最も大きくなり、そのピークを取るフルード数は、深度が浅くなるほど低速側に移動することが分かった。実際、ピーク時で見ても、(a)に示す $\Lambda=2$ の翼では $f=0.5$ で50%に達するのに対し、(b)の $\Lambda=6$ では、深度の深い $f=1.5$ の場合でピーク時には全抗力の50%を造波抵抗が占めることとなり、 $f=0.1$ の場合には、線型自由表面条件の仮定そのものにも議論の余地があるものの、ここでの計算上では95%に達する。したがっ

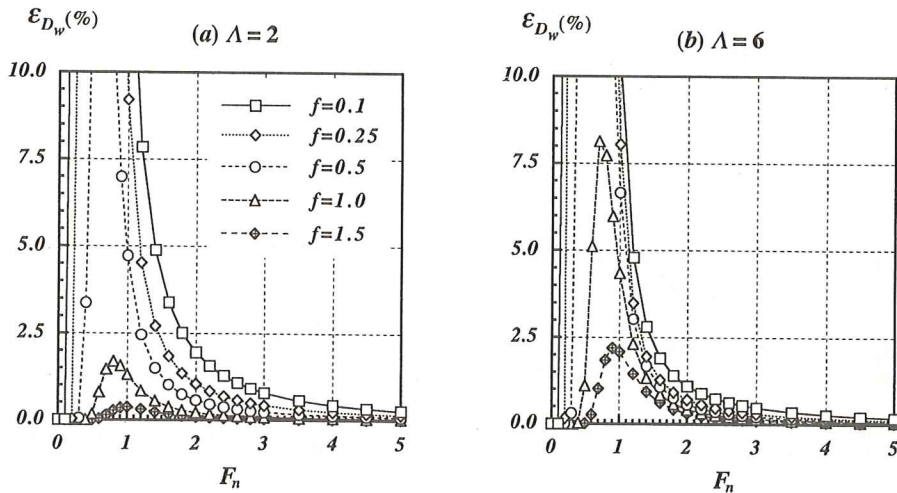


Fig. 18 Error due to the approximation of lifting line on the calculating wave-making resistance C_D of lifting surface for the various submerged depth in the case of rectangular wings. [(a) $\Lambda=2$, (b) $\Lambda=6$]

て、誘導抵抗の占める割合については、これと全く逆の傾向のことが云えるわけである。また、同図に記す右端の→は、それぞれの没水深度に対する高速極限値を示したものであり、(57)式に示す逆鏡像モデルを採用した場合の Γ 分布 (Fig. 16 (a) に $F_n \rightarrow \infty$ で示す) を使って、(55)式によって造波抵抗を計算したものである。この結果から、 $\Lambda=2$ の場合は、図の右端に当る $F_n=5$ 程度の高速域で、→が示す値にほぼ漸近していることが分かる。一方、 $\Lambda=6$ の場合についても同様な収束傾向であるが、アスペクト比が高くなった影響により、特に深度が深い場合には $F_n=5$ ではまだ完全には収束しておらず、更にもう少し低い造波抵抗値に漸近する様子が現われている。

次に、Fig. 18 は、造波抵抗を渦格子による揚力面で計算したものの $C_{Dw-surface}$ と、Fig. 16 (a) に示した後縁パネルのダブレット密度で測った循環分布を有する揚力線で近似して求めた場合 $C_{Dw-tine}$ の差異について検討したものである。結果は、常に揚力線近似を施した造波抵抗値の方が大きく得られるようであり、その揚力面に対する差を全抗力に対する相対誤差を ϵ_{Dw} として、

$$\epsilon_{Dw} = \frac{C_{Dw-tine} - C_{Dw-surface}}{C_D} \times 100 \dots\dots\dots(64)$$

によって示したものである。同じく(a)が $\Lambda=2$ 、(b)が $\Lambda=6$ の翼に対する結果であるが、どちらの場合もフルード数 $F_n \geq 2$ の高速域では、深度が極端に浅い $f=0.1$ の場合を含めても、その誤差は3%以内に収まるようであり、揚力線近似によって十分造波抵抗値を推定できることが分かる。しかし、フルード数が $F_n < 2$ の低速域では、様相が異なり、深度が深くて $f \geq 1.0$ の場合には、 $\Lambda=2$ で2%以下、 $\Lambda=6$ でも8%以下に収まり、どうか揚力線近似が妥当性を持つものの、それより浅い場合には誤差は10%を遙かに越えるようであり、最早揚力線近似による造波抵抗値は無力となることが分かる。ここで、アスペクト比の影響について、もう少し細かく見てみると、高速域では $\Lambda=6$ の方がより誤差が小さく容易に理解できるが、低速域の誤差は逆に $\Lambda=2$ の方が小さく得られているのは、低アスペクト比の場合、Fig. 17 (a)でも示したように、全抵抗 C_D に比して造波抵抗 C_{Dw} そのものが小さいことから、 C_D に対する相対誤差としてプロットした結果であると考えられる。

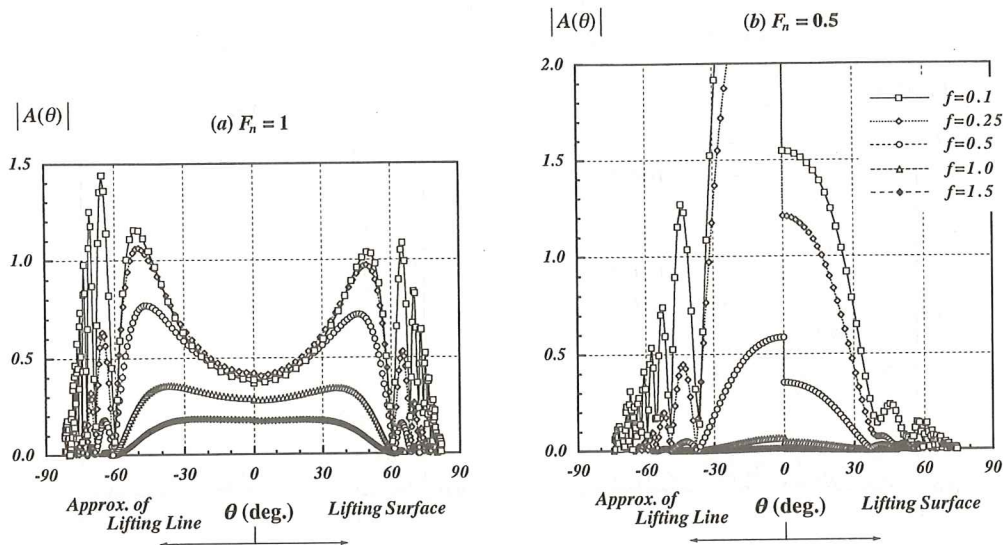


Fig. 19 Wave amplitude functions $|A(\theta)|$ of the rectangular wing with $\Lambda=2$ in comparison between lifting surface and lifting line for the various submerged depth. [(a) $F_n=1$, (b) $F_n=0.5$]

一方, Fig. 19 は $A=2$ の翼を対象に, 自由波の振幅関数の絶対値 $|A(\theta)| (= \sqrt{C^2+S^2})$ を(4)式を用いて計算し, 素成波の伝播方向 θ ベースにプロットしたものであり, 単位迎角当たりの値を示す。また, 波動場の左右対称性から θ に関して偶関数となることから, θ の正值側に渦格子法を用いた揚力面による $|A(\theta)|$ を, 負値側には Fig. 16(a)に示した循環分布 $\Gamma(y)$ を用いて(4)式によって計算した揚力線に集約した場合のそれを示している。結果は, それぞれ没水深度を5状態について置点した。この図から, (a)の $F_n=1$ の場合, 生成波の波長が長い ($\frac{\lambda}{2}=\pi \approx 3.1$) こともあり, どの深度域についても, 揚力面と揚力線近似によるそれは, 概ね同程度に得られている。特に, $\theta=0$ 近傍の横波の一致度は良好であり, 深度が浅くなった場合, その横波成分が縮退して結果が $\theta=0$ 付近でスリ鉢状となって, $\theta \geq 50^\circ$ の縦波成分を揚力線近似が多少大き目に推定する程度であり, この程度のフルード数では揚力線近似が結構有効であることが分かる。しかしながら, (b)の $F_n=0.5$ の場合になると, その半波長が翼コードよりも短くなる ($\frac{\lambda}{2}=\frac{\pi}{4} \approx 0.79$) こともあって, コード方向の Γ 分布を無視し, 1本の揚力線に集約する近似は成立せず, 特に深度 f が浅い場合には, 同一のスケールの図面に収まらないほど過大評価してしまうようである。また, 縦波成分の変動も激しくなり, 低速域での造波特性の推定に対して揚力線近似が破綻する様子が分かる。なお, 速度域(a), (b)によらず, 深度 f が浅くなるほど, 縦波成分の影響が顕著になることは, 通常の没水体の波の特性と合致するものである。

7. 結 論

本論では, 定常揚力面を自由表面影響を考慮して数値解析するための核関数として, 渦糸による造波グリーン関数を構築し, その有効性について検討した。また, それを用いて主にアスペクト比

$A=2$ の矩形翼を対象に揚力面問題を解き, 抗力成分に占める造波抵抗の割合や揚力線近似の適用可能性等について論じたところ, およそ次のような結論を得た。

i) 渦糸モデルによる造波グリーン関数を構築し, その x 方向の微係数を計算するための具体的な表示式を導いた。実際の計算例を, 渦点近似によるそれと比較することにより, その有効性を確認するとともに, 格子分割数を大幅に減少させる可能性があることを示した。

ii) 実際, 渦糸によるグリーン関数を用いて算定した揚力値や抗力値の計算精度を, 渦点近似を施した場合と比較して有効性を検討したところ, 深度が浅い $f \leq 0.25$ の場合にその効果が顕著であり, 渦糸モデルを採用することにより, 少ない格子分割で高精度な流体力を求め得ることを示した。

iii) 自由表面下にある水中翼に作用する抗力成分について運動量定理に基づいた解析を行ない, 正鏡像渦を考慮した流場では, 誘導抵抗と造波抵抗が干渉しないことを示した。

iv) 矩形翼に関する計算結果から, 抗力の自由表面影響に及ぼす没水深度, フルード数等の影響は, ほぼ揚力に対するそれと同様なことを示した。また, 抗力を成分々離して検討したところ, 正鏡像成分による誘導抵抗 $C_{D_{r-ii}}$ は, フルード数全域に亘って負となって推力を生じており, 誘導抵抗そのものは水面影響を考慮することにより減ぜられることが分かった。一方, 造波抵抗は常に正值として生ずるものの, それと鏡像成分による誘導抵抗の和 $C_{D_{r-ii}} + C_{D_w}$ を水面影響による抵抗成分として捉えれば, それは高速域では丁度逆鏡像分の誘導抵抗を生じるのに対し, 低速域では推力を生じることも分かった。

v) 水中翼に作用する抗力成分における誘導抵抗と造波抵抗の寄与度について調査したところ, 造波抵抗の占める割合は, 深度が浅いほど, またアスペクト比が高いほど大きくなることを示した。また, その割合は翼弦長ベースのフルード数 $F_n=1$ の辺りで最も大きくなり, そのピークを取るフルード数は, 深度が浅くなるほど低速側に移動す

ることも分かった。

vi) 揚力面の造波抵抗を、自由波の振幅関数のレベルから論じ、生成波の波長が翼弦長に比して短い低速域では、深度が浅くなると揚力線近似が破綻することを示した。ただし、高速域の造波抵抗算定においては、没水深度に拘わらず、揚力線近似は有効であることも分かった。

本稿を閉じるに臨み、この研究の当初に貴重な文献を紹介して戴きました本学 大学院 工学研究科 教授 田村欣也先生に篤く御礼申し上げます。なお、本研究の一部は平成7年度 学内予算の研究奨励費(一般研究B)の配分を受けて行なわれ、数値解析は全て本学 情報科学センターの NEC-EWS4800/330 のCコンパイラを用いて実施したことを付記し、関係各位に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 丸尾 孟：水中翼に及ぼす水面の影響に就いて、造船協会論文集，第86号(前編 Jun. 1953)，pp. 43~58.
- 2) 山本善之：General Theory of Wave Motion Due to a Moving Body, *8th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics* (1952), 山本善之先生論文選集, pp. 279~286.
- 3) 西山哲男：全没揚力面の定常理論，造船協会論文集，第115号 (Jun. 1964)，pp.10~20.
- 4) 西山哲男：水中翼の一般揚力線理論とその応用，造船協会論文集，第116号 (Dec. 1964)，pp.1~12.
- 5) 鈴木勝雄：高速艇の流体力学 (その2)，§2. 2. 1 水中翼の流体力学，「高速艇と性能」シンポジウム・テキスト，日本造船学会 (Jun. 1989)，pp.63~65.
- 6) 中武一明，川越忠彦，片岡克己，安東 潤：水中翼に働く流体力の計算，西部造船会々報，第76号 (Aug. 1988)，pp.1~13.
- 7) Li, B: A Numerical Method for Calculation Hydrodynamic Characteristics of a Hydrofoil with Arbitrary Planform, *5th International High-Speed Surface Craft Conference, Southampton* (May 1986)，pp.L1~L16.
- 8) 堀 勉：渦システムによる造波グリーン関数を導入した定常揚力面の数値解析，日本造船学会論文集，第175号 (Jun.1994)，pp.31~45.
- 9) 花岡達郎：プロペラ理論と揚力面理論，船舶技術研究所報告，第14巻，第5号 (Sept. 1977)，pp.335~348.
- 10) 経塚雄策，堀 勉，小寺山 亘：水中揚力体に加わる非定常流体力について(第一報 翼単独の場合)，日本造船学会論文集，第167号 (Jun. 1990)，pp.43~53.
- 11) 姫野洋司，平野 進，北川和弘：水面滑走板の造波特性について，【附録】核関数の数値計算，関西造船協会誌，第220号 (Sept.1993)，pp.13~16.
- 12) 堀 勉：斜航する船の波に対する横切断波形解析法について——1枚の横切断波形を用いた Fourier 変換法の提案——，【附録A】運動量定理による造波横力公式の導出，関西造船協会誌，第212号 (Sept.1989)，pp.36~39.
- 13) Newman, J.N.: *Marine Hydrodynamics*, § 5. 10 *Induced Drag*, *The MIT Press* (1977)，pp. 197~200.
- 14) 安東 潤，片岡克己，中武一明：超高速域における Rankine Source 法について，西部造船会々報，第84号 (Aug.1992)，pp.1~10.