境界入力システムの有界作用素によるフィードバック特性

日　當　明　男*

Bounded Feedback Properties of Boundary Input Systems

Haruo HINATA

In [12]-[14], the regularity of the solution (state) of boundary input systems was investigated, and the equivalent distributed input systems to a boundary input system were derived. Using this equivalence, the controllability of boundary input systems was cosidered in [15]. However, the stabilizability of boundary input systems was not discussed in the previous author's papers. In order to discuss this problem, we first needed to investigate the feedback properties of boundary input systems. In this report, it is shown that the concept of boundary input systems is invariant under bounded feedback.

1．はじめに

一本の鉄棒の温度分布の変化は，熱伝導方程式と呼ばれる偏微分方程式で記述される。このとき鉄棒全体から熱を加えるとき，これを分布入力システムといい，両端のみから熱を加えるとき，これを境界入力システムと呼ぶ。また，窓や壁を通して熱の流入があるような部屋の温度変化を扱うとき，これも境界入力システムとしてとらえることができる。このような境界入力システムは，我々の身近に数多くあり，以前からそれらの温度制御については，個々のシステムを記述する偏微分方程式を基にして研究されてきた[1]-[4]。これらの研究は，個々の偏微分方程式の特性に依存していたため，他の分野に応用できるような一般的なものではなかった。より一般的な結果を得るために，Fattorini[5]は境界入力システムの研究に関数解析を適用した。彼の考え方はBalakrishnan[6]に影響を与えた。Balakrishnanは半群理論によるアプローチの基礎をつくり，彼の後に多くの研究が続いた[7]-[15]。Lasiecka[8]は境界入力システムの解の表現やその性質（滑らかさ）などを調べ，Lasiecka & Triggiani[9]-[11]はフィードバックによる安定化について議論した。

著者も境界入力システムの解について考察し[12]，Hinata & Inaba[14]は[8]のモデルをも含むモデルを用いて解の滑らかさについて議論した。またそこでは境界入力システムに等価な分布入力システムを導いた。また，境界入力システムの可制御性については，等価な分布入力システムを用いて同時期に考察し[15]，分布入力システムと同様な条件を導いた。境界入力システムの安性化については，Lasiecka & Triggiani[9]-[11]も考察してはいるが，彼女らは，システムを安定化するためにフィードバック作用素が満たすべき十分条

*情報制御工学コース助手
1992年９月30日受付

件を，個々の境界条件に対して求めた。しかし，基本的なシステムのフィードバック（摂動）に関する議論が，まだ十分にされてはいないと思われる。すなわち，一つの境界入力システムに対して，フィードバック制御を施した後のシステムもまた境界入力システムとなることが保証されていなければならない。本報告では，境界入力システムとして[12]-[14]で導入されたモデルを用い，境界入力システムの概念が有界なフィードバックのもとで不変であることを示す。

2．数学的準備と境界入力システム

XとYをそれぞれ実ヒルベルト空間とし，それぞれの内積に誘導されるノルムをそれぞれ$\|\cdot\|_X$，$\|\cdot\|_Y$と表わす。$\boldsymbol{B}(X;Y)$をXからYへの有界線形作用素全体がつくるバナッハ空間とし，$\boldsymbol{B}(X;Y)$上の作用素ノルムは$\|\cdot\|_{B(X;Y)}$と表わされる。簡単のために，$\boldsymbol{B}(X;X)$は$\boldsymbol{B}(X)$と表わす。線形作用素Aの定義域，零空間（カーネル）およびその値域をそれぞれ$\boldsymbol{D}(A)$，$\boldsymbol{N}(A)$および$\boldsymbol{R}(A)$で表わす。また，Aのレゾルベント集合を$\rho(A)$と表わし，各$\lambda\in\rho(A)$におけるAのレゾルベント，すなわち$(\lambda I-A)^{-1}$のX全体への拡張を$R(\lambda;A)$で表わす。作用素Aが閉作用素の時，各$\lambda\in\rho(A)$において$R(\lambda;A)$は$(\lambda I-A)^{-1}$に一致する。

閉線形作用素$A:(\boldsymbol{D}(A)\subset X)\to X$が$X$上の$(C_0\text{-})$半群$\{S(t);t\geq 0\}$の生成作用素であるとする。このとき適当な実数$\omega$，$M_\omega>0$をとると，半群$\{S(t);t\geq 0\}$に対して，

$$\|S(t)\|_{B(X)}\leq M_\omega e^{\omega t}$$

がすべての$t\geq 0$において成り立つ。上式を満たすようなωの下限は

$$\omega_0:=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|S(t)\|_{B(X)}$$

で与えられる。このω_0は半群またはその生成作用素の発展定数と呼ばれる。

また半群$\{S(t);t\geq 0\}$が解析的であるとは，適当な$\delta\in(0,\pi/2)$と0の近傍V_0に対して，$S(\cdot)$が角領域$\{\lambda\in\mathbf{C};|\arg\lambda|<\delta\}\cup V_0$に解析接続可能である時をいう。このような解析的半群に対して，次の2つの命題が成り立つことが知られている。

(2.1)命題[18, p.52, p.61]。X上の半群$\{S(t);t\geq 0\}$の生成作用素を$A:(\boldsymbol{D}(A)\subset X)\to X$とする。このとき$\{S(t);t\geq 0\}$が解析的であるならば，次が成り立つ。

(i)　任意の$t>0$において，$\boldsymbol{R}(S(t))\subset\boldsymbol{D}(A)$となる。

(ii)　任意の$t>0$のすべての$x\in X$において

$$\frac{d}{dt}S(t)x=AS(t)x$$

が成り立ち，適当な$K>0$をとると

$$\|AS(t)\|_{B(X)}\leq\frac{K}{t}$$

が各$t\in(0,1)$において満たされる。■

(2.2)命題[18, p.61]。X上の半群$\{S(t);t\geq 0\}$の生成作用素を$A:(\boldsymbol{D}(A)\subset X)\to X$とする。このとき$\{S(t);t\geq 0\}$が解析的であるための必要十分条件は，生成作用素$A$に対して，$\varphi\in(\pi/2,\pi)$，$\omega\in\mathbf{R}$, $M_\omega>0$を適当にとるとき

$$\textstyle\sum_\varphi:=\{\lambda\in\mathbf{C};|\arg\lambda|<\varphi\}\cup\{0\}\subset\rho(A-\omega I)$$

$$\|R(\lambda;A-\omega I)\|_{B(X)}\leq\frac{M_\omega}{|\lambda|+1}$$

がすべての$\lambda\in\sum_\varphi$において成り立つことである。このとき，$\|S(t)\|_{B(X)}\leq M_\omega e^{\omega t}$がすべての$t\geq 0$において成り立つ。また，$\varphi$は$\omega\in\mathbf{R}$のとり方に依らない。■

この命題より，次の系が導かれる。

(2.3)系。X上の解析的半群$\{S(t);t\geq 0\}$の生成作用素を$A:(\boldsymbol{D}(A)\subset X)\to X$とし，その発展定数を$\omega_0\in\mathbf{R}$とする。このとき，適当な$\varphi\in(\pi/2,\pi)$をとると任意の$\omega>\omega_0$に対して，$\sum_\varphi\subset\rho(A-\omega I)$が満たされ，

$$\|R(\lambda;A-\omega I)\|_{B(X)}\leq\frac{M_\omega}{|\lambda|+1}$$

をすべての$\lambda\in\sum_\varphi$において満たすような定数$M_\omega>0$が存在する。また任意の$\mu>\omega>\omega_0$に対して，

$$\|R(\lambda;A-\mu I)\|_{B(X)}\leq\frac{1}{\sin\varphi}\left(1+\frac{1}{\mu-\omega}\right)\frac{M_\omega}{|\lambda|+1}$$

がすべての$\lambda\in\sum_\varphi$において満たされる。

［証明］系の前半の主張は命題(2.2)より容易に

導かれるので，後半のみを示す。

任意の $\mu>\omega>\omega_0$ をとり，$\nu=\mu-\omega>0$ とおく。このとき，系の前半の結果より

$$\Sigma_\varphi\subset\rho(A-\mu I)$$

$$\|R(\lambda;A-\mu I)\|_{B(X)}=\|R(\lambda+\nu;A-\omega I)\|_{B(X)}$$

$$\leq\frac{M_\omega}{|\lambda+\nu|+1}\leq\frac{M_\omega}{|\lambda+\nu|}$$

となる。故に，後半の結果を証明するためには，任意の $\lambda\in\Sigma_\varphi$ において

$$\frac{1}{|\lambda+\nu|}\leq\frac{1}{\sin\varphi}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{|\lambda|+1}$$

となることを示せばよい。上式は $\lambda=0$ のとき明らかに成り立つので，$\lambda\neq0$ のときを調べる。このため $\lambda=r\cos\theta+jr\sin\theta$ とおく。ここで，$r>0$, $-\varphi<\theta<\varphi$, $\varphi\in(\pi/2,\pi)$, j を虚数単位とする。このとき，$|\lambda|=r$, $|\lambda+\nu|=\sqrt{r^2+\nu^2+2r\nu\cos\theta}\geq\sqrt{r^2+\nu^2+2r\nu\cos\varphi}$ となる。従って，

$$\frac{|\lambda|+1}{|\lambda+\nu|}\leq\frac{r+1}{\sqrt{r^2+\nu^2+2r\nu\cos\varphi}}$$

$$=\frac{r}{\sqrt{r^2+\nu^2+2r\nu\cos\varphi}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+\nu^2+2r\nu\cos\varphi}}$$

となる。ここで上式の最右辺の 2 項をそれぞれ $r\in(0,\infty)$ の関数を見ると，

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+\nu^2+2r\nu\cos\varphi}}\leq\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+\nu^2+2r\nu\cos\varphi}}\leq\frac{1}{\nu\sin\varphi}$$

となり，任意の $\lambda\in\Sigma_\varphi$ において

$$\frac{|\lambda|+1}{|\lambda+\nu|}\leq\frac{1}{\sin\varphi}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$$

が成り立つことが分かる。このように系の後半の結果が示される。 ∎

作用素 $A:(\boldsymbol{D}(A)\subset X)\to X$ が正定であるとは，Aが次の(a)，(b)を満たすことである。

(a) $\boldsymbol{D}(A)$ はXで稠密であり，Aは閉作用素である。

(b) 適当な $\varphi\in(\pi/2,\pi)$ と $M>0$ をとると，
$\Sigma_\varphi\subset\rho(-A)$ となり

$$\|R(\lambda;-A)\|_{B(X)}\leq\frac{M}{|\lambda|+1}$$

がすべての $\lambda\in\Sigma_\varphi$ において成り立つ。

従って，Aが正定作用素であれば，$-A$ は解析的半群を生成する。

作用素 $A:(\boldsymbol{D}(A)\subset X)\to X$ を正定作用素であるとし，$\alpha\in(0,1)$ をする。このとき，正定作用素Aの分数べき A^α は次のように定義される[16]，[18]。

$$A^\alpha x:=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}xd\lambda,\quad x\in\boldsymbol{D}(A^\alpha)$$

ここで，$\boldsymbol{D}(A^\alpha)$ は右辺の積分が存在するような $x\in X$ 全体の集合である。正定作用素の分数べきは，X内で稠密に定義された閉作用素となり，$0\leq\alpha\leq\beta\leq1$ のとき $\boldsymbol{D}(A^\beta)\subset\boldsymbol{D}(A^\alpha)$となる。ここで，$A^0=I$ とする。

正定作用素Aの負べき $A^{-\alpha}$ は，対応する正べき A^α のX全体への拡張 $(A^\alpha)_e$ の逆作用素として定義できる。すなわち，$A^{-\alpha}$ の定義域 $\boldsymbol{D}(A^{-\alpha})$ は $\boldsymbol{D}'((A^\alpha)^*)$ である。ここで，$\boldsymbol{D}'((A^\alpha)^*)$ は A^α の共役作用素 $(A^\alpha)^*$ の定義域 $\boldsymbol{D}((A^\alpha)^*)\subset X$ の双対空間を意味し，$X\subset\boldsymbol{D}'((A^\alpha)^*)$ となる。この負べきの定義が一般の負べきの定義[17]，[18]の拡張となることは明らかである。

正定作用素の分数べきに関して次の命題が成り立つ。

(2.4) **命題**。$A:(\boldsymbol{D}(A)\subset X)\to X$ を正定作用素とし，$\alpha\in(0,1)$ とする。このとき，

(i) 適当な c_α をとると，任意の $x\in\boldsymbol{D}(A)$ に対して，

$$\|A^\alpha x\|_X\leq c_\alpha\|x\|_X^{1-\alpha}\|Ax\|_X^\alpha$$

が成り立つ。

(ii) $x\in\boldsymbol{D}(A^\alpha)$ ならば，$\|\lambda^\alpha A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X$ は $\lambda\in(0,\infty)$ の関数として有界である。

(iii) $x\in X$, $\alpha\in(0,1)$ とする。このとき $\|\lambda^{\alpha+\varepsilon}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X$ が $\lambda\in[0,\infty)$ の関数として有界となるような $\varepsilon\in(0,1-\alpha)$ が存在するならば，$x\in\boldsymbol{D}(A^\alpha)$ である。

[証明] (i)は[18, p. 73]による。

(ii)を示すために，$x\in \boldsymbol{D}(A^\alpha)$ と任意の $\lambda\geq 0$ をとる。このとき，A^α と $(\lambda I+A)^{-1}$ が可換であることに注意して，(i)を用いると

$$\begin{aligned}\|\lambda^\alpha A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X&=\|\lambda^\alpha A^{1-\alpha}(\lambda I+A)^{-1}A^\alpha x\|_X\\&\leq\lambda^\alpha c_{1-\alpha}\|(\lambda I+A)^{-1}A^\alpha x\|_X^\alpha\|A(\lambda I+A)^{-1}A^\alpha x\|_X^{1-\alpha}\\&\leq\lambda^\alpha c_{1-\alpha}\left(\frac{M}{\lambda+1}\|A^\alpha x\|_X\right)^\alpha((M+1)\|A^\alpha x\|_X)^{1-\alpha}\\&\leq\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+1)^\alpha}c_{1-\alpha}(M+1)\|A^\alpha x\|_X\end{aligned}$$

が得られる。ここで，Mは

$$\|R(\lambda;-A)\|_{B(X)}=\|(\lambda I+A)^{-1}\|_{B(X)}\leq\frac{M}{\lambda+1}\qquad(1)$$

をすべての $\lambda\geq 0$ において満たす定数である。故に，(ii)が示される。

最後に(iii)示す。$x\in X$, $\alpha\in(0,1)$ において仮定が満たされており，$T>0$，$N>0$ に対して，

$$\|\lambda^{\alpha+\varepsilon}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X\leq N\quad(\lambda\geq T)$$

すなわち，

$$\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X\leq N\lambda^{-(1+\varepsilon)}$$

がすべての $\lambda\geq T$ において成り立つとする。このとき，次式が得られる。

$$\int_T^\infty\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X d\lambda\leq\int_T^\infty N\lambda^{-(1+\varepsilon)}d\lambda=\frac{N}{\varepsilon T^\varepsilon}$$

一方，(1)式を用いると

$$\int_0^T\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X d\lambda\leq\int_0^T\lambda^{\alpha-1}(M+1)\|x\|_X d\lambda=\frac{M+1}{\alpha}T^\alpha\|x\|_X$$

となる。故に，

$$\int_0^\infty\|\lambda^{\alpha-1}A(\lambda I+A)^{-1}x\|_X d\lambda\leq\frac{M+1}{\alpha}T^\alpha\|x\|_X+\frac{N}{\varepsilon T^\varepsilon}<\infty$$

従って，$x\in \boldsymbol{D}(A^\alpha)$ となる。 ∎

次に境界入力システムを定義する。X，V，U をヒルベルト空間とし，$U\subset V$ とする。また $\tilde{A}:(\boldsymbol{D}(\tilde{A})\subset X)\to X$, $H:(\boldsymbol{D}(H)\subset X)\to V$ とし，$\boldsymbol{D}(\tilde{A})\subset\boldsymbol{D}(H)$, $\boldsymbol{R}(H)\subset U$ とする。このとき，システム

$$(2.5)\quad\begin{cases}\dot{x}(t)=\tilde{A}x(t),\ t>0;\ x(0)=x_0\in X\\Hx(t)=u(t),\ t>0\end{cases}$$

を考える。ここで，$x(\cdot):[0,\infty)\to X$, $u(\cdot):[0,\infty)\to U$ とする。システム(2.5)において

(2.6) $Ax:=\tilde{A}x,\ x\in\boldsymbol{D}(A):=\boldsymbol{D}(\tilde{A})\cap\boldsymbol{N}(H)$

なる作用素を定義する。このとき

(2.7) **定義**[14]。システム(2.5)が境界入力システムであるとは，次の(i)，(ii)，(iii)のすべての条件が満たされることである。

(i) (2.6)式で定義される作用素AがX上の解析的半群 $\{S(t);t\geq 0\}$ を生成する。ここで半群の発展定数を ω_0 とする。

(ii) 適当な $\omega>\omega_0$ をとると，各 $u\in U$ において
$$(\omega I-\tilde{A})G_\omega u=0,\ HG_\omega u=u$$
を満たす単射の $G_\omega\in\boldsymbol{B}(U;X)$ が存在する。

(iii) (ii)のω, G_ω に対して
$$G_\omega\in\boldsymbol{B}(U;\boldsymbol{D}((\omega I-A)^\alpha))$$
を満たす $\alpha\in(0,1)$ が存在し，その上限 α_0 が $\alpha<1$ を満たす。 ∎

上の定義に関連して，命題(2.2)，(2.4)および[14]を用いると，次の命題が得られる。

(2.8) **命題**。次が成り立つ。

(i) システム(2.5)が(2.7，i)を満たすとき，適当な $\varphi\in(\pi/2,\pi)$ を選ぶと，各 $\omega>\omega_0$ に対して $\Sigma_\varphi\subset\rho(A-\omega I)$ となり，各 $\lambda\in\Sigma_\varphi$ において
$$\|R(\lambda;A-\omega I)\|_{B(X)}\leq\frac{M_\omega}{|\lambda|+1}$$
が成り立つような定数 $M_\omega>0$ が存在する。すなわち，$\omega I-A$ が正定作用素となる。またこのとき，各 $t\geq 0$ において，$\|S(t)\|_{B(X)}\leq M_\omega e^{\omega t}$ となる。

(ii) システム(2.5)が(2.7，i，ii)を満たすとき，作用素 G_ω は一意である。また任意の $\lambda>\omega_0$ においても(2.7，ii)を満たす作用素 G_λ は存在し，
$$G_\lambda u=(\omega I-A)(\lambda I-A)^{-1}G_\omega u$$
がすべての $u\in U$ に対して成立する。さらに，任意の $\omega>\omega_0$ と $\lambda\geq 0$ において次式が成り立つ。
$$\|G_{\omega+\lambda}\|_{B(U;X)}\leq(1+M_\omega)\|G_\omega\|_{B(U;X)}$$

(iii) システム(2.5)が定義(2.7)のすべての条件を

満たすとき，α_0 は $\omega>\omega_0$ のとり方に依らず定まり，また任意の $\omega>\omega_0$，$\alpha\in[0,\alpha_0)$ に対して，

$$\lambda^{\alpha}\|G_{\omega+\lambda}\|_{B(U;\,X)}\leq M_{\omega,\,\alpha}$$

がすべての $\lambda\geq 0$ において成り立つような定数 $M_{\omega,\,\alpha}>0$ が存在する。従って，任意の $\omega>\omega_0$ において，$\lambda\to\infty$ のとき，$\|G_{\omega+\lambda}\|_{B(U;\,X)}\to 0$ となる。

■

上の命題(2.8, iii)より，一つの境界入力システムに対して定義(2.7, iii)の α_0 は唯一に定まることが分かる。それ故，この定数 α_0 はその境界入力システムの正則定数と呼ばれる。また次のような命題も成立するが，その証明は省略する。

(2.9) **命題。** システム(2.5)が定義(2.7)を満たす境界入力システムであるとし，$\omega>\omega_0$ とする。このとき，各 $\lambda\in\rho(A)$ に対して，

$$\tilde{G}(\lambda)u:=(\omega I-A)(\lambda I-A)^{-1}G_{\omega}u,\ u\in U$$

なる作用素 $\tilde{G}(\lambda)$ を定義すると，この作用素 $\tilde{G}(\lambda)$ は単射で，$\tilde{G}(\lambda)\in \boldsymbol{B}(U;X)$ となり，

$$(\lambda I-\tilde{A})\tilde{G}(\lambda)u=t,\ H\tilde{G}(\lambda)u=u$$

が各 $u\in U$ において満たされる。すなわち，$\lambda>\omega_0$ において $\tilde{G}(\lambda)=G_{\lambda}$ となる。また $\tilde{G}(\lambda)$ の定義は $\omega>\omega_0$ のとり方に依らない。さらに，$\tilde{G}(\cdot)$ は $\rho(A)$ 上の正則関数であり，各 $\omega>\omega_0$ に対して，

$$\|\tilde{G}(\omega+\lambda)\|_{B(U;\,X)}\leq(1+M_{\omega})\|G_{\omega}\|_{B(U;\,X)}$$

がすべての $\lambda\in\sum_{\varphi}$ において成り立つ。ここで，M_{ω}, φ, $\sum_{\varphi}$ は命題(2.8. i)のなかで用いられたものと同じである。 ■

境界入力システムの解について次の定理が成り立つ。

(2.10) **定理** [14]。システム(2.5)が発展定数 ω_0, 正則定数 α_0 を持つ境界入力システムであるとする。このとき

(i) $x_0\in X$, $p>\alpha_0^{-1}$, $u(\cdot)\in L^p(0,\infty;U)$, $\omega>\omega_0$ に対して，

$$x(t):=S(t)x_0+\int_0^t(\omega I-A)S(t-s)G_{\omega}u(s)ds \quad (t\geq 0)\quad (1)$$

とすると，上式の右辺は $\omega>\omega_0$ の選び方に依らず一つの関数 $x(\cdot)$ を定義し，その関数は $[0,\infty)$ 上の X-値連続関数となる。また連続な $u(\cdot)$ に対しても上と同じ結果が成立する。ここで，$u(\cdot)\in L^p(0,\infty;U)$ は，$\|u(\cdot)\|_U$ が $(0,\infty)$ 上で p 乗可積分であることを意味する。

(ii) $x_0\in X$, $u(\cdot)\in C^2([0,\infty);U)$, $\omega>\omega_0$ に対して，(1)式で定義される関数 $x(\cdot)$ は

(a) $x(\cdot)\in C^1([0,\infty);X)$。

(b) 各 $t>0$ において，$x(t)\in \boldsymbol{D}(\tilde{A})$。

(c) 各 $t>0$ において，$\dot{x}(t)=\tilde{A}x(t)$, $Hx(t)=u(t)$ を満たす。

(d) $x(0)=x_0$

を満たす。すなわち $x(\cdot)$ は境界入力システム(2.5)の強解となる。ここで $C^j([0,\infty);Y)$ はヒルベルト空間 Y に値をとる $[0,\infty)$ 上の j 回連続微分可能な関数全体を表わす。

3．境界入力システムに対するフィードバック制御

システム(2.5)が定義(2.7)を満たす境界入力システムであるとし，作用素 $F\in\boldsymbol{B}(X;U)$ を用いて，

$$u(t)=Fx(t)+v(t)\quad(t\geq 0)$$

なるフィードバック制御則を境界入力システムに施すことを考える。このときフィードバック後のシステムは，

$$(3.1)\quad \begin{cases}\dot{x}(t)=\tilde{A}x(t),\ t>0;\ x(0)=x_0\in X\\(H-F)x(t)=v(t),\ t>0\end{cases}$$

と表現され，このフィードバック後のシステムもまた境界入力システムとなることが3つの定理に分けて示される。この過程のなかで定義(2.7)および命題(2.8)内の記号は，すべてそのまま用いる。

(3.2) **定理。** $\omega>\omega_0$, $x\in X$ に対して

$$z(t)=S(t)x+\int_0^t(\omega I-A)S(t-s)G_{\omega}Fz(s)ds\quad(t\geq 0)$$

は連続な一意解をもち，$z(t)=:S_F(t)x\ (t\geq 0)$ とすると，$\{S_F(t);\,t\geq 0\}$ は X 上の半群となる。また A_F をその半群の生成作用素とし，$\varphi\in(\pi/2,\pi)$, $\omega_F>\omega_0$ を適当にとると，$\sum_{\varphi}\subset\rho(A_F-\omega_F I)$ となり，下の両式がすべての $\lambda\in\sum_{\varphi}$ において成立する。

$R(\lambda;A_F-\omega_F I)$

$$=(I-\tilde{G}(\lambda+\omega_F)F)^{-1}R(\lambda;A-\omega_F I)$$

$$\|R(\lambda;A_F-\omega_F I)\|_{B(X)}\leq\frac{M_{\omega F}}{(1-c_F)(|\lambda|+1)}$$

ここで，$c_F<1$ であり，$M_{\omega F}>0$ は

$$\|R(\lambda;A-\omega_F I)\|_{B(X)}\leq\frac{M_{\omega F}}{|\lambda|+1}$$

をすべての $\lambda\in\sum_\varphi$ において満たす定数である。これより半群 $\{S(t);t\geq 0\}$ は解析的となる。さらに任意の $\lambda\geq\omega_F$ に対して

$$A_F x=A(I-G_\lambda F)x+\lambda G_\lambda Fx$$

が各 $x\in\boldsymbol{D}(A_F)$ において成立する。ここで，$\boldsymbol{D}(A_F)=\boldsymbol{D}(\tilde{A})\cap\boldsymbol{N}(H-F)$ である。

［証明］$\{S(t);t\geq 0\}$ が X 上の半群となり，任意の $x\in X$ と $t\geq 0$ において

$$S_F(t)x=S(t)x+\int_0^t(\omega I-A)S(t-s)G_\omega FS_F(s)xds$$

を満たすことは[19]を用いて容易に示されるので，ここでは省略する。また，適当に $\omega_1>\omega_0$ をとるとき，$\{\lambda\in\mathbf{C};Re\,\lambda\geq 0\}\subset\rho(A_F-\omega_1 I)\cap\rho(A-\omega_1 I)$ となり，上式のラプラス変換と命題(2.9)より，$Re\,\lambda\geq 0$ なる任意の $\lambda\in X$ において

$$\{I-\tilde{G}(\lambda+\omega_1)F\}R(\lambda;A_F-\omega_1 I)x=R(\lambda;A-\omega_1 I)x \tag{1}$$

が成り立つことが分かる。

今，命題(2.8, iii)より

$$c_F:=\left(1+\frac{2M_{\omega 1}}{\sin\varphi}\right)\|G_{\omega 1+\mu 1}\|_{B(U;X)}\|F\|_{B(X;U)}<1$$

を満たすような $\mu_1\geq 1$ が存在する。このとき $\omega_F:=\omega_1+\mu_1$, $M_{\omega F}:=\frac{2M_{\omega 1}}{\sin\varphi}$ とおき，命題(2.3)を用いると

$$\|R(\lambda;A-\omega_F I)\|_{B(X)}\leq\frac{1}{\sin\varphi}\left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\frac{M_{\omega 1}}{|\lambda|+1}\leq\frac{M_{\omega F}}{|\lambda|+1}$$

が任意の $\lambda\in\sum_\varphi$ において満たされる。さらに命題(2.9)より，任意の $\lambda\in\sum_\varphi$ において

$$\|\tilde{G}(\lambda+\omega_F)\|_{B(U;X)}\leq(1+M_{\omega F})\|G_{\omega F}\|_{B(U;X)} \tag{2}$$

が導かれる。故に任意の $\lambda\in\sum_\varphi$ に対して

$$\|\tilde{G}(\lambda+\omega_F)F\|_{B(X)}\leq\|\tilde{G}(\lambda+\omega_F)\|_{B(U;X)}\|F\|_{B(X;U)}$$
$$\leq(1+M_{\omega F})\|G_{\omega F}\|_{B(U,X)}\|F\|_{B(X,U)}=c_F<1 \tag{3}$$

が成り立つ。このことより，$\{I-\tilde{G}(\lambda+\omega_F)F\}^{-1}\in\boldsymbol{B}(X)$ が，すべての $\lambda\in\sum_\varphi$ において存在する。このとき(1)式より $Re\,\lambda\geq 0$ なる $\lambda\in\mathbf{C}$ に対して

$$R(\lambda;A_F-\omega_F I)x$$
$$=\{1-\tilde{G}(\lambda+\omega_F)F\}^{-1}R(\lambda;A-\omega_F I)x \tag{4}$$

がすべての $x\in X$ において満たされることがわかる。また $\{I-\tilde{G}(\cdot+\omega_F)F\}^{-1}$ と $R(\cdot;A-\omega_F I)$ はともに $\sum_\varphi$ において正則なので，$R(\cdot;A_F-\omega_F I)$ も $\sum_\varphi$ 上に解析接続できる。すなわち，$\sum_\varphi\subset\rho(A_F-\omega_F I)$ となり，

$$\|R(\lambda;A-\omega_F I)\|_{B(X)}$$
$$\leq\frac{1}{1-\|\tilde{G}(\lambda+\omega_F)F\|_{B(X)}}\|R(\lambda;A-\omega_F I)\|_{B(X)}$$
$$\leq\frac{M_{\omega F}}{(1-c_F)^{-1}(|\lambda|+1)}$$

がすべての $\lambda\in\sum_\varphi$ において成り立つ。故に命題(2.2)より半群 $\{S(t);t\geq 0\}$ は解析的となる。また A_F のレゾルベントの表現(4)より，任意の $\lambda\geq\omega_F$ と各 $x\in X$ において

$$(\lambda I-A_F)^{-1}x=\{I-G_\lambda F\}^{-1}(\lambda I-A)^{-1}x$$

となる。故に任意の $\lambda\geq\omega_F$ において，

$\boldsymbol{D}(A_F)=\{I-G_\lambda I\}^{-1}\boldsymbol{D}(A)$ であり，

$$A_F x=A(I-G_\lambda F)x+\lambda G_\lambda Fx$$

が各 $x\in\boldsymbol{D}(A_F)$ において成り立つ。

最後に $\boldsymbol{D}(A_F)=\boldsymbol{D}(\tilde{A})\cap\boldsymbol{N}(H-F)$ を示すために，$\lambda>\omega_F$ を任意にとり，$x\in\boldsymbol{D}(A_F)$ とする。このとき $y:=(I-G_\lambda F)x$ とおくと，$y\in\boldsymbol{D}(A)$ となり，

$$x=y+G_\lambda Fx\in\boldsymbol{D}(A)+\boldsymbol{R}(G_\lambda)\subset\boldsymbol{D}(\tilde{A})$$

となる。また $\boldsymbol{D}(A)\subset\boldsymbol{N}(H)$, HG_λ が U 上の恒等作用素となることより，

$$(H-F)x=H(y+G_\lambda Fx)-Fx=Fx-Fx=0$$

故に，$x\in\boldsymbol{D}(\tilde{A})\cap\boldsymbol{N}(H-F)$ となる。

逆に $x\in\boldsymbol{D}(\tilde{A})\cap\boldsymbol{N}(H-F)$ とし，$y:=(I-G_\lambda F)x$ とおく。このとき $y=x-G_\lambda Fx\in\boldsymbol{D}(\tilde{A})$ となり，また $Hy=Hx-HG_\lambda Fx=(H-F)x=0$ となる。すなわち，$y\in\boldsymbol{D}(\tilde{A})\cap\boldsymbol{N}(H)=\boldsymbol{D}(A)$ となる。従って，$x=\{I-G_\lambda F\}^{-1}y\in\{I-G_\lambda F\}^{-1}\boldsymbol{D}(A)$ となり，$x\in\boldsymbol{D}(A_F)$ が得られる。このように，定理(3.2)が証明される。 ■

(3.3)**定理**。ω_F をシステム(3.1)に対して定理(3.2)で得られた定数とする。このとき各 $\lambda\geq\omega_F$ にお

いて，

$$G_\lambda(I-FG_\lambda)^{-1}=(I-G_\lambda F)^{-1}G_\lambda \qquad (1)$$

となる。また各$\lambda\geq\omega_F$に対して

$$K_\lambda u:=G_\lambda(I-FG_\lambda)^{-1}u \quad (u\in U) \qquad (2)$$

と定義すると，K_λは単射で，

$$\begin{aligned}\|K_\lambda\|_{B(U;X)}&\leq(1-c_F)^{-1}\|G_\lambda\|_{B(U;X)}\\&\leq(1-c_F)^{-1}(1+M_{\omega F})\|G_{\omega F}\|_{B(U;X)}\end{aligned}$$

を満たし，各$u\in U$において

$$(\lambda I-\tilde{A})K_\lambda u=0,\ (H-F)K_\lambda u=u$$

が成り立つ。さらに，任意の$\lambda,\omega>\omega_F$および各$u\in U$において，次が成り立つ。

$$K_\lambda u=(\omega I-A_F)(\lambda I-A_F)^{-1}K_\omega u \qquad (3)$$

［証明］任意の$\lambda>\omega_F$をとる。このとき$G_\lambda\in\boldsymbol{B}(U;X)$であり，定理(3.2)の証明中の(3)式を用いると，

$$(I-FG_\lambda)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}[FG_\lambda]^n\in\boldsymbol{B}(U)$$

$$(I-G_\lambda F)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}[G_\lambda F]^n\in\boldsymbol{B}(X)$$

がともに作用素ノルムで収束するので，(1)式は成り立つ。また，G_λが単射でもあるので，(2)式によって定義されるK_λは単射であり，$K_\lambda\in\boldsymbol{B}(U;X)$となる。また定理(3.2)の証明中の(2),(3)式を用いると，

$$\begin{aligned}\|K_\lambda\|_{B(U;X)}&\leq(1-c_F)^{-1}\|G_\lambda\|_{B(U;X)}\\&\leq(1-c_F)^{-1}(1+M_{\omega F})\|G_{\omega F}\|_{B(U;X)}\end{aligned}$$

も任意の$\lambda\geq\omega_F$において成り立つことが分かる。

さらに，各$\lambda\geq\omega_F$に対して，$\boldsymbol{R}(G_\lambda)\subset\boldsymbol{N}(\lambda I-\tilde{A})$となり，$HG_\lambda$が$U$上で恒等作用素となることに注意すると

$$(\lambda I-\tilde{A})K_\lambda u=(\lambda I-\tilde{A})G_\lambda(I-G_\lambda F)^{-1}u=0$$

$$\begin{aligned}(H-F)K_\lambda u&=(H-F)G_\lambda(I-G_\lambda F)^{-1}u\\&=HG_\lambda(I-G_\lambda F)^{-1}u-FG_\lambda(I-G_\lambda F)^{-1}u\\&=u\end{aligned}$$

が任意の$u\in U$において成り立つ。すなわち，システム(3.1)は定義(2.7, ii)を満たす。従って定理(3.2)と合わせると，システム(3.1)が定義(2.7, i, ii)を満たすことになる。故に，命題(2.8, ii)より(3)式が従う。 ■

(3.4) **定理**。システム(3.1)において，ω_F, $K_\omega(\omega>\omega_F)$をそれぞれ定理(3.2)，定理(3.3)のなかで与えられたものとする。このとき，任意の$\alpha\in[0,\alpha_0)$に対して

$$(\omega I-A_F)^\alpha K_\lambda\in\boldsymbol{B}(U;X)$$

すなわち，$K_\lambda\in\boldsymbol{B}(U;\boldsymbol{D}((\omega I-A_F)^\alpha))$となる。また，上式を満たす$\alpha$の上限は$\alpha_0$である。

［証明］$\omega>\omega_F$, $\alpha\in[0,\alpha_0)$, $\varepsilon\in(0,\alpha_0-\alpha)$とする。このとき，定義(2.7, iii)より，任意の$\lambda\geq0$に対して，$\alpha+\varepsilon<\alpha_0$と$\boldsymbol{R}(G_{\omega+\lambda})\subset\boldsymbol{D}((\omega I-A)^{\alpha+\varepsilon})=\boldsymbol{D}(((\lambda+\omega)I-A)^{\alpha+\varepsilon})$となることに注意すると，命題(2.8, iii)より

$$\begin{aligned}&\|\lambda^{\alpha+\varepsilon}(\omega I-A_F)(\lambda I+(\omega I-A_F))^{-1}K_\omega u\|_X\\&=\|\lambda^{\alpha+\varepsilon}K_{\omega+\lambda}u\|_X\\&=\|\lambda^{\alpha+\varepsilon}G_{\omega+\lambda}(I-FG_{\omega+\lambda})^{-1}u\|_X\\&\leq\lambda^{\alpha+\varepsilon}(1-c_F)^{-1}\|G_{\omega+\lambda}\|_{B(U;X)}\|u\|_U\\&\leq(1-c_F)^{-1}M_{\omega,\alpha+\varepsilon}\|u\|_U\end{aligned}$$

がすべての$u\in U$において成り立つ。

ここで，

$$g(\lambda):=\begin{cases}(1-c_F)^{-1}(1+M_{\omega F})\|G_{\omega F}\|_{B(U;X)}\lambda^{\alpha-1}, & \lambda\in(0,1)\\(1-c_F)^{-1}M_{\omega,\alpha+\varepsilon}\lambda^{-1-\varepsilon}, & \lambda\in(1,\infty)\end{cases}$$

とおくとき，任意の$\lambda>0$と各$u\in U$において

$$\|\lambda^{\alpha-1}(\omega I-A_F)(\lambda I+(\omega I-A_F))^{-1}K_\omega u\|_X\leq g(\lambda)\|u\|_U$$

が成り立ち，

$$\begin{aligned}L&:=\int_0^\infty g(\lambda)d\lambda\\&=\frac{1}{1-c_F}\left(\frac{1+M_{\omega F}}{\alpha}\|G_{\omega F}\|_{B(U;X)}+\frac{M_{\omega,\alpha+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\\&<\infty\end{aligned}$$

となり，各$u\in U$に対して

$$\|(\omega I-A_F)^\alpha K_\omega u\|_X\leq\frac{L\sin\alpha\pi}{\pi}\|u\|_U$$

が成り立つ。これより，$(\omega I-A_F)^\alpha K_\omega\in\boldsymbol{B}(U;X)$が得られる。

また，$\beta>\alpha_0$において，$(\omega I-A_F)^\beta K_\omega\in\boldsymbol{B}(U;X)$とすると，任意の$u\in U$に対して$K_\omega u\in\boldsymbol{D}((\omega I-A_F)^\beta)$となる。このとき命題(2.4, i)より

$$\|\lambda^\beta(\omega I-A_F)((\lambda+\omega)I-A_F)^{-1}K_\omega u\|_X\leq N_\omega(u)$$

がすべての$\lambda\in[0,\infty)$において満たされるような定数$N_\omega(u)>0$が存在する。また定理(3.3)より，

各 $u\in U, \lambda\geq 0$ において

$$(\omega I-A_F)((\lambda+\omega)I-A_F)^{-1}K_\omega u=K_{\lambda+\omega}u$$
$$=G_{\lambda+\omega}(I-FG_{\lambda+\omega})^{-1}u=(I-G_{\lambda+\omega}F)^{-1}G_{\lambda+\omega}u$$

となり，命題(2.8, iii)より

$$(\omega I-A)((\lambda+\omega)I-A)^{-1}G_\omega u=G_{\lambda+\omega}u$$
$$=(I-G_{\lambda+\omega}F)(\omega I-A_F)((\lambda+\omega)I-A_F)^{-1}K_\omega u$$

がすべての $u\in U, \lambda\geq 0$ において成り立つ。

今，$\gamma\in(\alpha_0,\beta)$ をとり，$\varepsilon=\beta-\gamma$ とすると，任意の $u\in U, \lambda\geq 0$ において

$$\|\lambda^{\gamma+\varepsilon}(\omega I-A)((\lambda+\omega)I-A)^{-1}G_\omega u\|_X$$
$$=\|(I-G_{\lambda+\omega}F)\lambda^\beta(\omega I-A_F)((\lambda+\omega)I-A_F)^{-1}K_\omega u\|_X$$
$$\leq\|(I-G_{\lambda+\omega}F)\|_{B(X)}\|\lambda^\beta(\omega I-A_F)((\lambda+\omega)I-A_F)^{-1}K_\omega u\|_X$$
$$\leq(1+c_F)N_\omega(u)<\infty$$

が成り立つ。故に命題(2.4, ii)より，$G_\omega u\in \boldsymbol{D}((\omega I-A)^\gamma)$ が得られる。ここで $u\in U$ は任意であったので，$\boldsymbol{R}(G_\omega)\subset\boldsymbol{D}((\omega I-A)^\gamma)$ となる。また $(\omega I-A)^\gamma$ が閉作用素なので，$(\omega I-A)^\gamma G_\omega$ も閉となり，閉グラフ定理を用いると，$(\omega I-A)^\gamma G_\omega\in\boldsymbol{B}(U;X)$ が導かれる。一方，$\alpha_0<\gamma$ なので，これは正則定数 α_0 のとり方に矛盾する。従って，$\beta>\alpha_0$ においては $(\omega I-A_F)^\beta K_\omega$ は有界作用素とはならない。これで定理が証明された。 ■

以上の3定理より，次の定理が得られる。

(3.5) 定理。システム(2.5)が定義(2.7)を満たす境界入力システムであるとし，$F\in\boldsymbol{B}(U;X)$ とする。このときシステム(2.5)に対してフィードバック則

$$u(t)=Fx(t)+v(t)\quad(t\geq 0)$$

を施した後のシステム(3.1)もまた境界入力システムとなる。このとき，システム(3.1)の正則定数はシステム(2.5)と同じ α_0 である。 ■

4．おわりに

今回の考察で，境界入力システムの概念（定義(2.7)）が，有界なフィードバックの下では不変であることが示された。しかし，ここではフィードバック作用素を有界に制限している。非有界の作用素に対する同様の問題は，境界入力システムと分布入力システムの等価性を用いて議論することができる。この問題に対しては，すでにある程度の結果が得られているので，近い将来公表できるものと思われる。

謝　辞

今回の考察を通して，多くの有益な助言および指導を頂いた東京電機大学の稲葉博教授に感謝いたします。

参考文献

[1] Sakawa, Y.; *Controllability for partial differential equations of parabolic type,* SIAM J. Control, 12, 389-400. (1972)

[2] Russell, D.L.; *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic differential equations,* Studies in Appl. Math., 11, 189-211. (1973)

[3] Fattorini, H.O. and Russell, D.L.; *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension,* Archive Rat. Mech. Anal., 4, 272-292. (1971)

[4] Fattorini, H.O.; *Reachable states in boundary control of the heat equation are independent of time,* Prop. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A 81, 71-77. (1978)

[5] Fattorini, H.O.; *Boundary control system,* SIAM J. Control, 6, 349-385. (1968)

[6] Balakrishnan, A.V.; *Boundary control of parabolic equations: L-Q-R theory,* Prop. Conf. Theory of Nonlinear Eq., 11-23. (1977)

[7] Washburn, D.C.; *A bound on the boundary input map for parabolic equations with application to time optimal control,* SIAM J. Control & Optim., 17, 652-671. (1979)

[8] Lasiecka, I.; *Unified theory for abstract parabolic boundary problems-A semigroup approach,* App. Math. & Optim., 6, 287-333. (1970)

[9] Lasiecka, I. and Triggiani, R.; *Feedback semigroups and cosine operators for boundary feedback parabolic equations,* J. Diff. Eq., 47, 246-272. (1983)

[10] Lasiecka, I. and Triggiani, R.; *Stabilization and structural assignment of Dirichlet boundary feedback equations,* SIAM J. Cont. & Optim., 21, 766-803. (1983)

[11] Lasiecka, I. and Triggiani, R.; *Stabilization of Neumann boundary feedback of parabolic equations; The case of trace in the feedback loop,* Appl. Math. & Optim., 10, 307-350. (1983)

[12] Hinata, H.; *Mathematical foundation for boundary input linear systems in Banach space,* Master thesis, Tokyo Denki Univ. (1984)

[13] Hinata, H. and Inaba, H.; *A general mathematical model for boundary input systems,* 8th DST Symp., 171-176. (1985)

[14] Hinata, H. and Inaba, H.; *A general mathematical model for linear boundary input systems in Hilbert spaces,* Research Report, Tokyo Denki Univ., TDU-IS-2. (1987)

[15] 日當明男，稲葉博；境界入力システムに等価な分布入力システムとそれらの可制御性，第9回 DST シンポジウム，9-12。(1986)

[16] Komatsu, H.; *Fractional powers of operators,* Pacific J. Math., 19, 285-346. (1966)

[17] Komatsu, H.; *Fractional powers of operators, III, Negative powers,* J. Math. Soc. JPN, 21, 205-220. (1969)

[18] Pazy, A.; *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer (1983)

[19] Curtain, R.F., and Prichard, A.J.; *Infinite dimensional linear systems theory,* LNCIS 8, Springer (1978)