

## 定常造波における Neumann-Kelvin 問題の数値解析

—(その1) 2次元没水円筒に対する検討—

堀

勉\*

A Numerical Analysis of the Neumann-Kelvin Problem  
on Steady Wave Generation—(1st. Report) Some Numerical Discussions  
for a Two-Dimensional Submerged Circular Cylinder—

Tsutomu HORI

In this paper, a method of numerical analysis of the so-called Neumann-Kelvin problem for a ship's steady run trailing Kelvin's waves is discussed numerically.

Some numerical results on the resistance and lift forces caused by wave generation are presented for a two dimensional submerged circular cylinder. Numerical calculations confirm that both the value of the wave-making resistance evaluated by a momentum theorem based upon the amplitude of trailing free waves and by the pressure integral around the body surface converge to the same value with good accuracy as the number of divided elements increases.

## 1. はじめに

近年、高速艇のローワー・ハルや海洋観測に用いられる海中移動体などの開発研究が盛んに行われている。その性能設計において、没水体が水面直下を航走する際に働く流体力について、造波の影響を考慮した推定法の確立が望まれている。これら没水体においても、浅深度を高速航走する場合には、水上船舶の場合と同様な Kelvin 波を生じ、その造波作用に基づく抵抗や揚力が、性能上無視し得ない大きさになってくるからである。

没水体の造波抵抗を算定するには、細長体理論<sup>1)</sup>による方法も考えられるが、横断面積の変化

率で吹き出し分布を決定することから、適用できる細長比には自ずと限界がある上、造波干渉を物体境界条件に反映できず、実用上重要な没水深度が浅くなった場合に、推定精度が劣化する。また最近では、Rankine Source 法等の造波グリーン関数を用いない純数値的な解法による結果も報告され<sup>2),3)</sup>、自由表面条件の非線型性等も考慮できることから今後期待されるが、後流での波動の漸近挙動が保証されないことから、まだ解の信頼性には疑問が残る。

これに対して、Neumann-Kelvin 問題<sup>4)</sup>は、自由表面条件は線型化して扱うものの、物体境界条件は造波干渉を含めて厳密に満足させ得ることから、任意の物体形状に適用でき、しかも没水深度が浅

\*情報科学センター助教授

1992年9月30日受付

い場合にも、造波に基づく流体力を高精度に推定できる解法として期待される<sup>5),6)</sup>。一方、造波理論の観点からいえば、没水体の場合は、水面貫通物体の場合に問題となってくる吃水線積分効果<sup>7),8)</sup>の問題が生じず、Neumann-Kelvin 問題の数値解析法について検討するには、不確定要素が少なく好都合であるともいえる。ただ、従来この種の定常造波に関する研究は、主に船舶の抵抗・推進性能の分野を中心に研究が進められてきた経緯から、その殆どが造波抵抗に関する議論に留まっており、上下方向の造波揚力に関しては、計算例も少なく基礎資料が不足している状況にある<sup>3),9)</sup>。

本論文は、上述の状況に鑑み、Neumann-Kelvin 問題を 2 次元没水体の場合に適用し、境界積分方程式法としての数値解法上の種々の問題について検討したものである。実際の計算は、他の解法による結果との比較を容易にするため、没水円筒を対象に、吹き出し分布、波形、圧力分布を種々の自由表面条件に対して解き、それを基に造波に基づく抵抗ならびに揚力を算定した。また、運動量定理と圧力積分の両面から造波抵抗値を算定したところ、両者による値が、境界分割の細分化に連れて、ある一定値に収束することを数値的に確認した。まだ、自由表面貫通物体や 3 次元の場合の計算を行っていないなど不十分な部分も多いが、Neumann-Kelvin 問題の数値解法に関する基礎的な資料も出揃ったので、ここに第 1 報として御報告し、諸賢の御批判を仰ぐ次第である。

## 2. Neumann-Kelvin 問題の定式化

没水体が、自由表面を有する一様な流れの中に配された場合の、2 次元定常造波問題について、線型の自由表面条件を仮定するものの、物体条件は厳密に満足させて解く Neumann-Kelvin 問題としての定式化を行う。

### 2.1 座標系と無次元化

座標系は、Fig. 1 に示すような、円筒中心直上の静止水面上に原点  $o$  を配し、一様な流れ方向に

$x$  軸、鉛直上向きに  $z$  軸を取った直角座標  $(x, z)$  と、円筒表面に関しては、

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = -f + r \sin \theta \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

で定義される円筒座標  $(r, \theta)$  を併用する。

物理量は、予め、円筒径  $D$ 、一様流速  $U$ 、流体密度  $\rho$  を基準に、全て無次元化して扱うものとし、断わらない限り、余分な係数は一切付けないものとする。したがって、直径 1 の円筒が、流速 1 の流れの中に、円筒径に対する相対的な没水深度  $f$  で置かれているとして、問題を設定する。

### 2.2 境界値問題の設定

流体の非粘性、流場の非回転運動を仮定する限り、速度ポテンシャルが存在するから、ここでも、それに基づいた解析を行う。速度ポテンシャル  $\Phi$  は、

$$\Phi(x, z) = x + \phi(x, z) \dots\dots\dots(2)$$

のように一様流のポテンシャルと攪乱ポテンシャルに分離して取り扱うこととし、上述のように、予め  $UD$  で無次元化してある。以下、攪乱ポテンシャル  $\phi$  の満たすべき条件について考える。まず、流場の支配方程式 [L] は、その連続条件から

$$[L] \quad \nabla^2 \Phi(x, z) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x, z) = 0 \quad (\text{for } z \leq \zeta) \dots\dots\dots(3)$$

なる、2 次元のラプラス方程式である。ここに、 $\nabla^2$  は  $(x, y)$  面内で定義された Hamilton の勾配演算子であり、 $\zeta$  は水面の上昇量を表す。

次に、境界条件について考える。まず、自由表面条件式 [F] であるが、没水体を対象とする限り、水面上での攪乱速度が一様流速に較べて十分に小さいとして、微小振幅の仮定を採用することは、水面貫通物体の場合とは異なって可也りの合理性を持つことから、ここでも周知の線型自由表面条件式

$$[F] \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x_0 \frac{\partial}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x, z) = 0 \quad \begin{cases} \text{on } z=0 \\ \text{as } \mu \rightarrow +0 \end{cases} \dots\dots\dots(4)$$

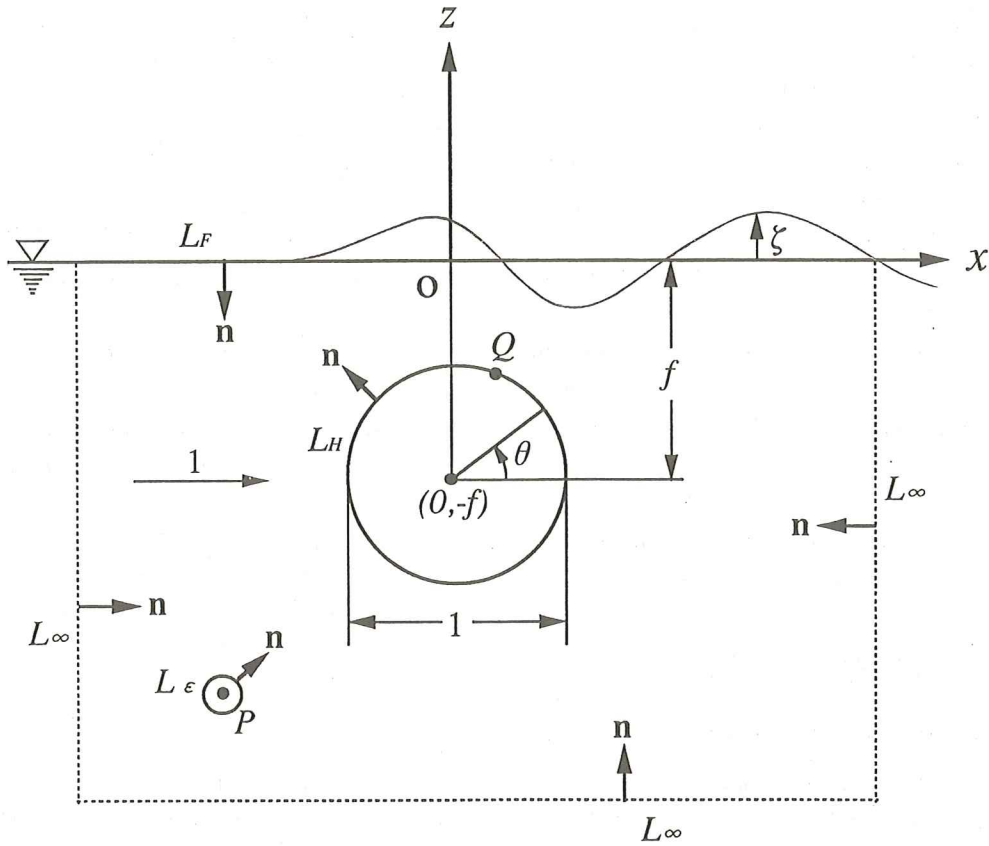


Fig. 1 Coordinate system and definitions of some basic quantities in two dimensional Neumann-Kelvin problem.

が成立するとする。ここに、 $x_0$ は無次元波数であり、円筒径 $D$ を基準にしたフルード数 $F_n$ との間に、

$$x_0 = \frac{gD}{U^2} = \frac{1}{F_n^2} \dots\dots\dots(5)$$

のような関係にある。 $\mu$ は Rayleigh の仮想摩擦係数であり、これによって下流にのみ波が生成されるという放射条件( $x \rightarrow -\infty$ には、波は生じない。)が自動的に満足されることになる。

また、物体表面 $L_H$ 上では法線流速は生じないから、

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = -n_x \quad (\text{on } L_H) \dots\dots\dots(6)$$

なる物体条件[H]が課される。ここに、 $n$ は、Fig.1

に示すように、境界から流体領域に向かって立てた単位法線ベクトルであり、 $\frac{\partial}{\partial n}$ は、その方向に微分することを意味する。また、 $(n_x, n_z)$ は、 $n$ の方向余弦である。更に、無限水深の仮定から、

$$[B] \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad (\text{as } z \rightarrow -\infty) \dots\dots\dots(7)$$

なる水底条件 [B] も満たす必要がある。

以上で、攪乱ポテンシャル  $\phi$  に関する境界値問題が設定されたから、境界条件式[F], [H], [B] 及びラプラス方程式 [L] を満足する  $\phi$  を求解する方法として、境界積分方程式法を考える。

準備として、ラプラス方程式 [L] と、2個の同次の境界条件式として、水底条件 [B] ならば



に、[F] の  $\mu$  に関する項の符号を反転させた

$$[F^*] \left( \frac{\partial^2}{\partial x_q^2} + x_0 \frac{\partial}{\partial z_q} - \mu \frac{\partial}{\partial x_q} \right) G_{\delta P}^* = 0$$

$$\begin{cases} \text{on } z=0 \\ \text{as } \mu \rightarrow +0 \end{cases} \dots\dots\dots(8)$$

のような逆流れに対する同次の水面条件式 [F\*] ( $x \rightarrow +\infty$ には、波は生じない。) を満たし、且つ、P 点に特異性を有する解として、グリーン関数  $G^*$  を導入する。この  $G^*$  と、[F] を満たす順流れに対するグリーン関数  $G$  とは、

$$G_{\delta P}^* = G_{PQ} \dots\dots\dots(9)$$

のような随伴関係にある。ここに、下添字の前者が標点 (field point) を、後者が特異点 (singular point) の位置を表す。

そこで、攪乱ポテンシャル  $\phi$  と随伴グリーン関数  $G^*$  に、 $G^*$  の特異点  $P$  を除外した Fig.1 に示すような水面下の流体領域に、グリーンの第 2 公式を

$$\int_{L_\varepsilon + L_H + L_F + L_\infty} \left( \phi_q \frac{\partial G_{\delta P}^*}{\partial n_q} - G_{\delta P}^* \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} \right) dl_q =$$

$$- \iint_{A_n - A_\varepsilon - A_H} (\phi_q \nabla_q^2 G_{\delta P}^* - G_{\delta P}^* \nabla_q^2 \phi_q) dA_q = 0 \dots\dots\dots(10)$$

のように適用すると、右辺は  $\phi$ 、 $G^*$  とともに、ラプラス方程式 [L] を満足することから、明らかに零となる。ここに、 $n$  は、先の定義から領域に対して内向き法線になる。

一方、左辺の線積分について考えると、特異点  $P$  周りの  $L_\varepsilon$  上の積分は、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限值として、 $2\pi\phi_P$  を得る。また、線型の水面条件式として、 $\phi$  が [F]、 $G^*$  が [F\*] を満たすことを用いれば、水面  $L_F$  上での積分値  $I_F$  は、 $z=\zeta$  上での積分が、静止水面  $z=0$  上の積分に置き換えられ、

$$\frac{\partial}{\partial n} \cong - \frac{\partial}{\partial z} \text{ となることを用いれば、}$$

$$I_F = \frac{1}{x_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_q \frac{\partial G_{\delta P}^*}{\partial x_q} - G_{\delta P}^* \frac{\partial \phi_q}{\partial x_q} - \mu \phi_q G_{\delta P}^* \right) dx_q$$

$$= \frac{1}{x_0} \left[ \phi_q \frac{\partial G_{\delta P}^*}{\partial x_q} - G_{\delta P}^* \frac{\partial \phi_q}{\partial x_q} - \mu \phi_q G_{\delta P}^* \right]_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 0$$

$$\text{(on } z=0) \dots\dots\dots(11)$$

となって、没水体の場合、無限上流と下流の値で決定されることになり、 $\phi$  と  $G^*$  では、波の放射条

件が反転した随伴関係にあるから、 $I_F$  は消失する。

(但し、水面貫通物体の場合は、この  $I_F$  から 3 次元の場合の吃水線積分<sup>4),8)</sup> に相当する、前端と後端に点吹き出しの項が残る。) 同様な事情で、上流、下流、水底を囲む  $L_\infty$  上の積分も消失するから、最終的に、(10)式は、

$$2\pi\phi_P = - \int_{L_H} \left( \phi_q \frac{\partial G_{\delta P}^*}{\partial n_q} - G_{\delta P}^* \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} \right) dl_q \dots\dots\dots(12)$$

となり、 $\phi$  が物体表面  $L_H$  上の境界積分によって求められることを示している。

次に、物体内部の流体運動を規定する攪乱ポテンシャルを  $\phi'$  についても、グリーンの第 2 公式を内部領域に適用すると、singular point  $P$  を同様に外部領域に設定する限り、内部領域に特異性はないから、

$$0 = \int_{L_H} \left( \phi'_q \frac{\partial G_{\delta P}^*}{\partial n_q} - G_{\delta P}^* \frac{\partial \phi'_q}{\partial n_q} \right) dl_q \dots\dots\dots(13)$$

となる。(12)、(13)式の辺々を加えれば、

$$2\pi\phi_P = - \int_{L_H} \left\{ (\phi_q - \phi'_q) \frac{\partial G_{\delta P}^*}{\partial n_q} - G_{\delta P}^* \left( \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi'_q}{\partial n_q} \right) \right\} dl_q \quad (14)$$

と書くことができる。ここに、(9)式の随伴関係を導入し、 $G_{\delta P}^*$  を  $G_{PQ}$  に置き換えることにより、特異点の位置を  $P$  から  $Q$  に移し、境界上に特異点が分布する周知の表示式<sup>4)</sup>を得る。更に、物体表面上で、

$$\begin{cases} \phi_q = \phi'_q \\ \sigma_q = \frac{\partial \phi_q}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi'_q}{\partial n_q} \quad (\text{on } L_H) \end{cases} \dots\dots\dots(15)$$

となるように、内部領域に対するポテンシャル  $\phi'$  を設定すれば、法線方向の二重吹き出し分布を表す第 1 項は消失し、攪乱ポテンシャル  $\phi$  が、第 2 項の物体境界  $L_H$  上の吹き出し分布  $\sigma_q$  (Kelvin Source) によって、

$$\phi_P = \frac{1}{2\pi} \int_{L_H} \sigma_q G_{PQ} dl_q \dots\dots\dots(16)$$

のように、表現できることが分かる。

一方、ここでの境界値問題は、法線流速で規定される Neumann 問題であるから、攪乱ポテンシャル  $\phi$  に関する上式を、物体表面上で法線方向に微分すると、



$$\left. \frac{\partial \phi_P}{\partial n_P} \right]_{L_H} = \frac{\sigma_P}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_H} \sigma_Q \frac{\partial G_{PQ}}{\partial n_P} dl_Q \quad (P \text{ on } L_H) \quad \dots\dots(17)$$

のようになり、右辺の第1項は、吹き出し点自身による法線方向の誘起速度を示すものである。上式と、非同次の物体表面条件式 [H] を等置することにより、境界積分方程式として、

$$-n_{x_P} = \frac{\sigma_P}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_H} \sigma_Q \left( n_{x_P} \frac{\partial}{\partial x_P} + n_{z_P} \frac{\partial}{\partial z_P} \right) G_{PQ} dl_Q \quad (P \text{ on } L_H) \quad \dots\dots(18)$$

を得ることができ、ここに、法線ベクトル  $(n_x, n_z)$  は、 $L_H$  に対しては外向きになる。この Kelvin Source の分布密度  $\sigma$  を、何らかの方法で決定しさえすれば、他の同次境界条件は既にグリーン関数自身が満たしていることから、求める流場は自動的に定められることになる。

### 2.3 造波グリーン関数の計算法

ここでは、前節で既知のものとして扱ってきた造波グリーン関数  $G$  (Havelock's Wave Source Potential) を導くとともに、数値計算に便利な冪級数展開式と遠方での漸近展開式を示す。更に、実際の境界積分方程式法に用いる、 $G$  の微係数に対する具体的な表示式を提示しておく。

#### 2.3.1 グリーン関数の表示式

2次元の場合の造波グリーン関数  $G$  は、ラプラス方程式の主要解である Rankine Source の項と、水面下 ( $z \leq 0$ ) の全領域で正則な  $G'$  に分離し、

$$G(x, z; x', z') = \log_e r + G'(x, z; x', z') \quad \dots\dots(19)$$

但し、 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}$  ……

のように、書くことができる。ここに、基本特異性を表す第1項については、Fourier の重複積分定理により、 $z=0$  を含む  $z > z'$  の領域において、形式的に、

$$\log_e r = \text{Real} \left[ - \int_0^\infty e^{-k(z-z') + ik(x-x')} \cdot \frac{dk}{k} \right] \quad \dots\dots(20)$$

のように表現できることから、正則部分  $G'$  についても、上式に合わせた形式で、

$$G'(x, z) = \text{Real} \left[ \int_0^\infty \varphi(k) \cdot e^{kz + ikx} dk \right] \quad \dots\dots(21)$$

のように、予め [L] と [B] を満たす Fourier 積分型の変数分離形を仮定することにより、[F] を満足するように、最終的に  $\mu \rightarrow +0$  であることを考慮に入れて、未定関数  $\varphi(k)$  を決定すれば、

$$\varphi(k) = \left. \begin{aligned} & \frac{k + \kappa_0 - i\mu}{k(k - \kappa_0 - i\mu)} \cdot e^{kz' - ikx'} \\ & \underset{\mu \rightarrow +0}{\sim} \left( -\frac{1}{k} + \frac{2}{k - \kappa_0 - i\mu} \right) \cdot e^{kz' - ikx'} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(22)$$

となり、これを(21)式に入れ戻せば、 $G'$  の表記として、

$$G'(x, z; x', z') = \text{Real} \left[ - \int_0^\infty e^{k(z+z') + ik(x-x')} \cdot \frac{dk}{k} \right] + 2 \cdot \text{Real} \left[ \int_0^\infty \frac{1}{k - \kappa_0 - i\mu} \cdot e^{k(z+z') + ik(x-x')} \cdot dk \right] \quad \dots\dots(23)$$

を得る。ここに、第1項は、(20)式と同形式であるから、実部を採れば対数関数となり、第2項の積分項については、Gauss 平面  $w = k + im$  上で変数変換を施して積分路を実軸から虚軸に変更し、 $x$  の符号別に留数の定理を適用した後、 $\mu \rightarrow +0$  とすれば、 $G'$  の表示式として、

$$G' = \log_e \sqrt{(x-x')^2 + (z+z')^2} - 4\pi e^{\kappa_0(z+z')} \sin \kappa_0(x-x') \cdot \left\{ \frac{1 + \text{sgn}(x-x')}{2} \right\} + 2 \cdot \text{Real} \left[ \int_0^\infty \frac{1}{m + i\kappa_0} e^{-m|x-x'| + im(z+z')} dm \right] \equiv \log_e R + G_f + G_t \quad \dots\dots(24)$$

を得る。式中、field point を  $P(x, z)$ 、singular point を  $Q(x', z')$  で、表している。ここに、第1項は、没水特異点の静止水面に関する正鏡像を与え、第2項の  $G_f$  は、留数項より生じたもので、後続自由波に相当し、符号関数  $\text{sgn}(x-x')$  により、特異点より上流 ( $x < x'$ ) においては放射条件が効いて消滅する。積分表示された第3項  $G_t$  は、局部攪乱を表しており、実数化して、

$$G_t = 2 \int_0^\infty \frac{m \cos m(z+z') + \kappa_0 \sin m(z+z')}{m^2 + \kappa_0^2} e^{-m|x-x'|} dm \quad \dots\dots(25)$$

とし、直接数値積分することも可能だが、特に  $|x-x'|$  が小さいとき (即ち、積分方程式を解く際の、標点と特異点が近接している時)、被積分関数の減衰が弱く、必要な精度を確保するには計算時間が異常に掛かるなどして、余り得策ではない。

そこで、 $G_l$ に関する積分項については、複素平面上で、

$$w = (m + ix_0)Y$$

但し、

$$Y \equiv \left. \begin{aligned} &|x-x'| - i(z+z') \\ &= Re^{i\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

のような変数変換を施し、積分経路を実軸と平行に取り直すことにより、複素数域に拡張された積分指数関数  $Ei$  を用いて、

$$G_l = -2\text{Real}[e^{ix_0Y} Ei(-ix_0Y)]$$

$$= -2e^{x_0(z+z')} \{E_c \cos x_0 |x-x'| - E_s \sin x_0 |x-x'|\} \dots\dots\dots(27)$$

のように、書き表すことができる。ここに、 $E_c$ 、 $E_s$  は、 $Ei$  の実部、虚部として定義したものであり、附録(A-3)式の結果から、

$$Ei(-ix_0Y) = -\int_{ix_0Y}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw$$

$$= \gamma + \log_e ix_0Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ix_0Y)^n}{n \cdot n!}$$

$$\equiv E_c + iE_s$$

但し、

$$\gamma = 0.57721 \dots\dots \text{(Euler の定数)} \dots\dots\dots(28)$$

のように、冪級数に展開した形として得られ、それぞれ、

$$E_c = \gamma + \log_e x_0R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_0R)^n}{n \cdot n!} \cos\{n(\theta - \frac{\pi}{2})\}$$

$$E_s = \frac{\pi}{2} + \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_0R)^n}{n \cdot n!} \sin\{n(\theta - \frac{\pi}{2})\} \dots\dots\dots(29)$$

但し、

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (z+z')^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{-(z+z')}{|x-x'|} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

と書くことができ、 $x_0R$  が極端に大きな場合を除き、容易に数値計算できる表式である。

一方、 $x_0R$  が充分に大きい場合には、漸近級数に展開して求めた方が、精度の面でも、計算時間の面でも有利である。

$Ei$  の漸近展開形は、同じく附録で導いたように、(A-4)式の積分項を省いて、

$$Ei(-ix_0Y) \underset{x_0R \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ix_0Y} \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)!}{(-ix_0Y)^n}$$

$$\equiv e^{-ix_0Y} \cdot \{\Omega_c + i\Omega_s\}$$

$$= E_c + iE_s \dots\dots\dots(31)$$

となる。この式から、漸近形に対する  $E_c$ 、 $E_s$  は、それぞれ、

$$E_c = e^{-x_0(z+z')} \cdot \{\Omega_c \cos x_0 |x-x'| + \Omega_s \sin x_0 |x-x'|\}$$

$$E_s = -e^{-x_0(z+z')} \cdot \{\Omega_c \sin x_0 |x-x'| - \Omega_s \cos x_0 |x-x'|\} \dots\dots(32)$$

のように、書き表される。ここに、 $\Omega_c$ 、 $\Omega_s$  は、(31)式中の総和記号に関する項の実部、虚部として定義したものであり、それぞれ、

$$\Omega_c = \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)!}{(x_0R)^n} \cos\{n(\theta - \frac{\pi}{2})\}$$

$$\Omega_s = -\sum_{n=1}^N \frac{(n-1)!}{(x_0R)^n} \sin\{n(\theta - \frac{\pi}{2})\} \dots\dots\dots(33)$$

となる。但し、 $\Omega_c$ 、 $\Omega_s$  に対する上式は、発散級数として得られており、第  $n+1$  項と第  $n$  項の比が 1 を越えた時点で計算を打ち切ることによって、最良の近似値を得ることができると考えられるため、本論の計算では項数  $N$  を、

$$\left. \begin{aligned} &\frac{N}{x_0R} \leq 1 \\ &\rightarrow N = \text{Integer}(x_0R) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

のように決定した。

尚、 $Ei$  に対して漸近形を採用した場合、グリーン関数の局所攪乱項  $G_l$  は、(27)式より、指数関数部が相殺して、単純に、

$$G_l = -2\Omega_c \dots\dots\dots(35)$$

として与えられる。

### 2.3.2 G の微係数に関する表示式

解くべき境界値問題は、(18)式に示すように法線流速で規定されるから、実際の数値計算に当たっては、造波グリーン関数  $G$  の  $x$  及び  $z$  に関する微係数に対する表示式を求めておく必要がある。

グリーン関数  $G$  は、(19)、(24)式の表記から、Rankine Source 項  $\log r$  と、その正鏡像項  $\log R$  を、纏めて  $G_r$  と記すことにより、

$$G = (\log r + \log R) + G_f + G_l$$

$$= G_r + G_f + G_l \dots\dots\dots(36)$$

と書くことができ、微係数についても、上記3項に分けて取り扱うことにする。

まず、Rankine Source に対応する  $G_r$  については、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_r}{\partial x} &= \frac{x-x'}{r^2} + \frac{x-x'}{R^2} \\ \frac{\partial G_r}{\partial z} &= \frac{z-z'}{r^2} + \frac{z+z'}{R^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

であり、また、後続自由波に相当する  $G_f$  についても、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_f}{\partial x} &= -4\pi\chi_0 e^{\kappa_0(z+z')} \cos\chi_0(x-x') \cdot \left\{ \frac{1+\text{sgn}(x-x')}{2} \right\} \\ \frac{\partial G_f}{\partial z} &= -4\pi\chi_0 e^{\kappa_0(z+z')} \sin\chi_0(x-x') \cdot \left\{ \frac{1+\text{sgn}(x-x')}{2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

と、計算できる。以下、局部攪乱波に相当する  $G_l$  の微係数について考えるが、便宜上、(27)式における大括弧内の複素数部を、

$$\Omega \equiv e^{i\kappa_0 Y} Ei(i\kappa_0 Y) \dots\dots\dots(39)$$

と置いて、計算を進める。このとき、 $x, y$  を纏めて、 $\eta_j (j=1, 2)$  と書き、積分指数関数  $Ei$  の微係数は、

$$\frac{\partial Ei(-i\kappa_0 Y)}{\partial \eta_j} = \frac{e^{-i\kappa_0 Y}}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \eta_j} \dots\dots\dots(40)$$

となることを用いれば、 $\Omega$  の微係数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_j} &= \frac{\partial Y}{\partial \eta_j} \cdot \left\{ i\kappa_0 e^{i\kappa_0 Y} Ei(-i\kappa_0 Y) + \frac{1}{Y} \right\} \\ &= \frac{\partial Y}{\partial \eta_j} \cdot \left[ \begin{aligned} &\frac{|x-x'|}{R^2} - \chi_0 e^{\kappa_0(z+z')} \cdot \{ E_c \sin\chi_0 |x-x'| \\ &\quad + E_s \cos\chi_0 |x-x'| \} \\ &+ i \left[ \frac{(z+z')}{R^2} + \chi_0 e^{\kappa_0(z+z')} \cdot \{ E_c \cos\chi_0 |x-x'| \right. \\ &\quad \left. - E_s \sin\chi_0 |x-x'| \} \right] \end{aligned} \right] \\ &\equiv \frac{\partial Y}{\partial \eta_j} \cdot [\Psi_c + i\Psi_s] \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

となる。ここに、(26)式より、

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta_j} = \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} = \text{sgn}(x-x') & (\text{for } j=1) \\ \frac{\partial Y}{\partial z} = -i & (\text{for } j=2) \end{cases} \dots\dots\dots(42)$$

であるから、(41)式で定義した  $\Psi_c, \Psi_s$  を用いれば、 $G_l$  の微係数は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_l}{\partial x} &= -2\text{Real} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] \\ &= -2\Psi_c \text{sgn}(x-x') \\ \frac{\partial G_l}{\partial z} &= -2\text{Real} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right] \\ &= -2\Psi_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

となり、これも(29)または(32)式の  $E_c, E_s$  さえ求めれば、容易に計算できる。

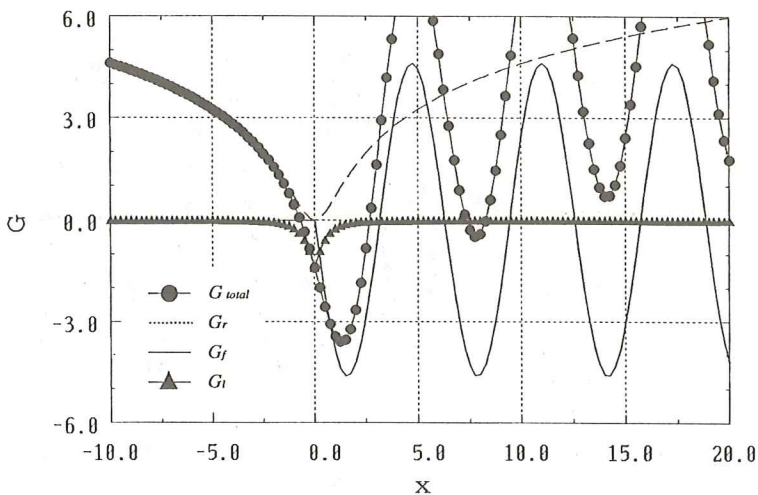


Fig. 2 Components of the value of Green function on  $z=0$  in the case of  $Fn=1, x'=0, z'=-1$ .



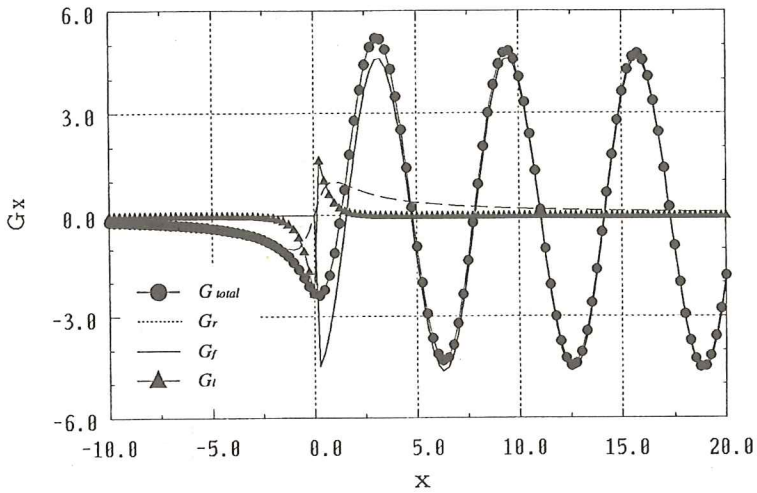


Fig. 3 Components of the derivative to x-direction of Green function on  $z=0$  in the case of  $Fn=1, x'=0, z'=-1$ .

2.3.3 グリーン関数とその微係数の計算例

Fig. 2 に、上述した造波グリーン関数  $G$  の計算例として、 $F_n=1$  の場合の、静水面  $z=0$  上での値を、成分に分解して置点した結果を示す。このときの特異点位置は、 $x'=0, z'=-1$  である。2次元の場合、 $G$  そのものは基本特異性が  $\log r$  であることから、その正鏡像を含めた点線で示す Rankine Source 項  $G_r$  が支配的となっている。また、

後続自由波に相当する項  $G_f$  は、特異点より下流側の  $x>0$  に対してのみ生じており、放射条件を満足していることが分かる。

一方、その微係数  $G_x (= \frac{\partial G}{\partial x})$ 、 $G_z (= \frac{\partial G}{\partial z})$  を、Fig. 3, 4 に示す。 $G_r$  ならびに局部攪乱波に相当する項  $G_e$  は、 $G_x$  については  $x=0$  に関して反対称であるのに対し、 $G_z$  については、 $G$  と同様に対

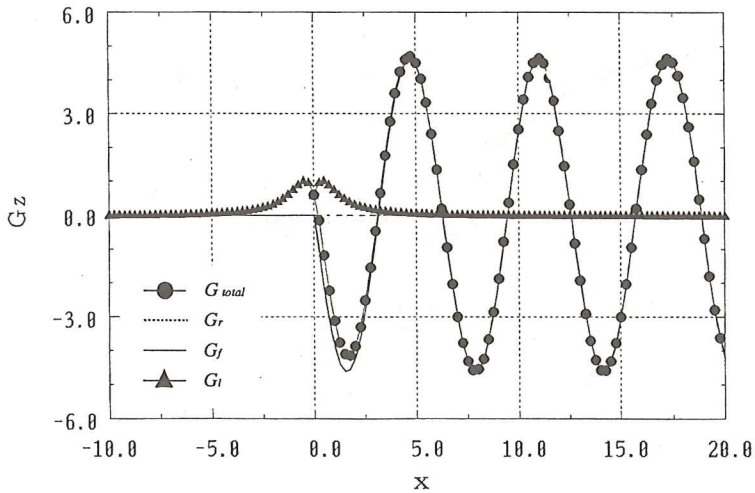


Fig. 4 Components of the derivative to z-direction of Green function on  $z=0$  in the case of  $Fn=1, x'=0, z'=-1$ .

称となっている。また、 $G_x$ 、 $G_z$  両者とも、下流側では、特異点直上の  $x=0$  付近を除けば、波動項  $G_f$  が支配的である。また、 $G_x$  については、Rankine Source 項  $G_r$  は、局部攪乱波に相当する項  $G_l$  に較べて、減衰が弱く遠方に影響が残るが、 $x=0$  の付近では、それと同程度の値となっているのに対し、 $G_z$  については、 $z=0$  上での値を置いていることから、 $G_r$  は消失している。しかしながら、境界積分方程式法を用いて物体表面上の吹き出し分布を決定するような場合には、ここに示す  $x=0$  付近のように、特異点近傍での  $G$  の微係数の値が、むしろ支配的となってくるから、Rankine Source や局部攪乱波の項を無視して計算を行えば、誤った結果に到達するであろうことは容易に推察される。

2.4 境界値問題の解法

(18)式に示す境界積分方程式は、グリーン関数として Rankine Source 項  $G_r$  のみを採用する場合には、円筒のような特別な場合に限って解析的に解くことも可能であるが、今回のような造波問題では、グリーン関数として Kelvin Source を採用するため、これを解析的に解くことは困難であるから、吹き出し分布  $\sigma$  を離散的に解くことを考える。

離散化に当っては、円筒表面を  $M$  個の円弧状の境界要素  $\delta\ell_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, M$ ) に分割し、要素内で吹き出しの分布密度は一定であると近似する。ここに、吹き出しを直線上に線分布させて計算することも可能であるが<sup>10),11)</sup>、本論では、その要素中心  $\theta_j$  に置いた強さ  $\sigma_j \delta\ell_j$  の点吹き出しに置き換えて計算を単純化している。実際、この近似のレベルの差異が結果に及ぼす影響は、一般に小さいことが知られている。

同じく、境界条件も、各々の要素中心に選んだ標点  $\theta_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, M$ ) で、離散的に満足させることにすれば、(18)式の離散化表現として、

$$-n_{xi} = \frac{\sigma_i}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^M \sigma_j \left( n_{xi} \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_i} + n_{zi} \frac{\partial G_{ij}}{\partial z_i} \right) \delta\ell_j$$

(for  $i=1, 2, 3, \dots, M$ ) .....(44)

を得る。但し、下添字の  $i$  は標点、 $j$  は要素番号を示すものであり、標点と特異点位置が一致する場合 ( $j=i$ ) は、総和記号から除いてある。上式は、 $M$  個の未知数  $\sigma_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, M$ ) に対して  $M$  個の等式からなる、 $M$  元 1 次の連立方程式となっている。しかも、係数行列の対角要素となる第 1 項は、吹き出し点自身による誘起速度を表しており、他の項に較べて支配的であるから、Gauss の消去法や、Crout 法、修正 Cholesky 法等を用いて容易に精度良く解くことができる。なお、本論の計算には、Crout 法を用いており、断わらない限り、分割数は  $M=72$  で行っている。

一方、実際の係数行列を計算するに当たり、 $r=\frac{1}{2}$  の円筒を対象にした場合、境界の要素分割は、周方向に  $M$  等分割とすれば、各要素の張る挟角  $\delta\theta$ 、標点の偏角  $\theta_i$  は、

$$\left. \begin{aligned} \delta\theta &= \frac{2\pi}{M} \\ \theta_i &= i \cdot \delta\theta \\ &\text{(for } i=1, 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

となるから、要素長  $\delta\ell_j$ 、法線ベクトルの方向余弦 ( $n_{xi}$ ,  $n_{zi}$ )、標点の座標 ( $x_i$ ,  $z_i$ ) は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \delta\ell_j &= \frac{1}{2} \delta\theta (= Const.) \\ n_{xi} &= \cos \theta_i \\ n_{zi} &= \sin \theta_i \\ x_i &= \frac{1}{2} \cos \theta_i \\ z_i &= -f + \frac{1}{2} \sin \theta_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

のように定まり、また  $\frac{\partial G}{\partial x}$  ならびに  $\frac{\partial G}{\partial z}$  は、前節 (37), (38), (43) 式の和として計算すればよい。

2.5 造波に基づく流体力の算定法

ここでは、境界積分方程式(44)を解いた結果として、離散的に得られた吹き出し分布  $\sigma_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, M$ ) を用いて、生成される波形や物体表面上の圧力分布、更にそれらに起因して生ずる造波抵抗

や揚力の算定法を示す。

2.5.1 波形の計算法

まず、得られた吹き出し分布から、表面波形を計算することを考える。生成される波高ζは、線型理論の枠内では、攪乱ポテンシャルφとの間に、

ζ(x) = -1/x\_0 \* [∂φ/∂x]\_{z=0} .....(47)

のような関係にあるから、(16)式を用いて、離散表記に書き改めることにより、

ζ\_k = -1/(2πx\_0) \* ∑\_{j=1}^M σ\_j \* ∂G\_{kj}/∂x\_k \* δl\_j .....(48)

のようにして求め得る。ここに、添字kは、水面上の計算点位置に付番したものであり、(44)式の場合とは異なり、計算点と特異点位置が一致することはないので、吹き出し点自身による誘起速度は生じない。

2.5.2 運動量定理による造波抵抗

ここでは、後流における攪乱流の漸近挙動を知ることにより、運動量定理に基づいて造波抵抗を算定する方法について述べる。

Fig. 1に示すように、没水体を、水面L\_Fと水面下の充分大きな検査面L\_∞で取り囲み、その領域に運動量の定理を適用することにより、造波抵抗X\_Wは、

X\_W = 1/2 \* ∫\_{-∞}^0 [ (∂φ/∂z)^2 - (∂φ/∂x)^2 ]\_{x=∞} dz + 1/(2x\_0) \* (∂φ/∂x)^2\_{z=0, x=∞} .....(49)

の形として得られ<sup>12)附録A</sup>、後流での攪乱ポテンシャルの漸近形を知ることができれば求め得る。

一方、無限後流でのグリーン関数の挙動は、(24)式により、局部攪乱波の影響は消失するから、後続自由波に支配され、

G(x, z)\_{x→∞} = 4πε^{k\_0(z+z\_j)} \* sinx\_0(x-x\_j) .....(50)

のようである。ここに、Rankine Source項G\_rは、微係数の段階では、遠方での漸近挙動には寄与しないから、予めこれを除いて記してある。このGを(16)式に用いることにより、攪乱ポテンシャルφの漸近形は、離散表現で、

φ(x, z) ~\_{x→∞} 1/(2π) \* ∑\_{j=1}^M σ\_j G\_j |\_{x→∞} δl\_j } .....(51)
= -e^{k\_0 z} \* { H\_c sinx\_0 x - H\_s cosx\_0 x }

のように書くことができる。ここに、H\_c、H\_sは、それぞれ

H = 2 \* ∑\_{j=1}^M σ\_j e^{k\_0 z\_j + ik\_0 x\_j} δl\_j } .....(52)
≡ H\_c + iH\_s

のように、Kochin関数Hの実部、虚部として定義したものである。これにより、x及びz方向の攪乱速度は、

∂φ/∂x ~\_{x→∞} -x\_0 e^{k\_0 z} \* { H\_c cosx\_0 x + H\_s sinx\_0 x } } .....(53)
∂φ/∂z ~\_{x→∞} -x\_0 e^{k\_0 z} \* { H\_c sinx\_0 x - H\_s cosx\_0 x }

のように求まる。

これらを、(49)式に代入し、zに関する積分を実行して、造波抵抗X\_Wを求めると、

X\_W = 1/(4x\_0) \* [ (∂φ/∂x)^2 + (∂φ/∂z)^2 ]\_{z=0, x=∞}
= x\_0/4 \* { H\_c^2 + H\_s^2 } .....(54)

となり、Kochin関数を用いて表現できる。

また、生成波の後流での漸近形は、(47)式の関係から、

ζ ~\_{x→∞} H\_c cosx\_0 x + H\_s sinx\_0 x .....(55)

と書くことができ、その波振幅ζ̄は、Kochin関数の絶対値として、

ζ̄ = √{ H\_c^2 + H\_s^2 } .....(56)

のように得られるから、(54)式の造波抵抗値も

X\_W = 1/4 \* x\_0 \* ζ̄^2 .....(57)

のように書き表され、2次元の場合、後流での波高さえ分かれば、造波抵抗を算定できる。尚、これを通常のように、1/2 \* ρU^2 Dで無次元化した造波抵抗係数C\_Wに書き改めれば、

C\_W = 2X\_W = 1/2 \* x\_0 \* ζ̄^2 = 1/2 \* (ζ̄/F\_n)^2 .....(58)

のようになる。



2.5.3 圧力積分による流体力の算定

ここでは、離散的に得られた吹き出し密度から、物体表面上の圧力分布を計算し、それに基づいて流体力の  $x$  ならびに  $z$  方向成分を算定することを考える。

圧力  $P$  は、流速成分が求まれば、Bernoulli の定理から、直ちに、

$$P = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\} - \rho_0 z$$

$$\equiv p - \rho_0 z \dots\dots\dots(59)$$

として求められ、前者3項を纏めて表記した  $p$  が、攪乱流による動的な圧力であり、第4項が無次元表示された静水圧の項である。ここに、後者は圧力積分により、没水深度に拘らず  $z$  方向に静的浮力  $Z_B$  として、直径1の円筒の場合、

$$Z_B = \frac{\pi}{4} \rho_0 = \frac{\pi}{4 F_n^2} \dots\dots\dots(60)$$

を生じるのみであるから、以降、造波に基づく流体力について考えるため、前者の動的圧力  $p$  のみについて取り扱う。

(59)式から、圧力  $p$  を求めるに当っては、円筒表面上での攪乱流速の  $x$  及び  $z$  成分を知る必要がある。そのための離散化表現式として、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\phi_i}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \sigma_i n_{x_i} + \sum_{j=1}^M \sigma_j \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_i} \delta \ell_j \\ \frac{\partial\phi_i}{\partial z_i} &= \frac{1}{2} \sigma_i n_{z_i} + \sum_{j=1}^M \sigma_j \frac{\partial G_{ij}}{\partial z_i} \delta \ell_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

を得る。ここに、 $j=i$  の場合が総和記号から外れているのは、(44)式と同様な事情による。

以上の操作を踏むことにより、得られた吹き出し分布から、圧力  $p$  を計算できる。このようにして得られた圧力は、物体表面  $L_H$  の内向き法線 ( $-\mathbf{n}$ ) 方向に作用するから、その  $x$  及び  $z$  方向成分を取って表面積分することにより、それぞれの方向の流体力  $F_x, F_z$  は、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\int_{L_H} p n_x d\ell \cong -\sum_{j=1}^M p_j n_{xj} \delta \ell_j \\ F_z &= -\int_{L_H} p n_z d\ell \cong -\sum_{j=1}^M p_j n_{zj} \delta \ell_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

のように求まる。ここに、 $F_x$  が造波抵抗、 $F_z$  は造波揚力であり、前者は、前節(57)式の運動量定理によって得られた結果  $X_w$  に、線型理論の範囲内では一致すべきものである (3.3節の Fig.14では、これを数値的に示している.)。

尚、圧力、流体力ともに、通常の  $\frac{1}{2} \rho U^2$  を規準にした係数の形に換算するには、

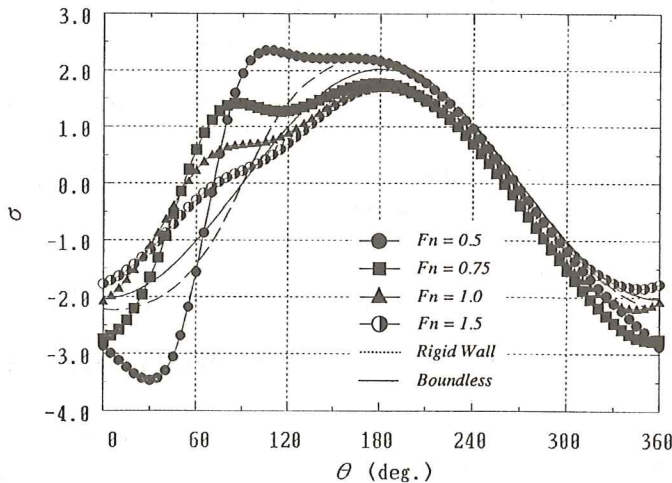


Fig. 5 Circumferential distributions of Kelvin source with the various Froude's numbers in the case of  $f=0.75$ .

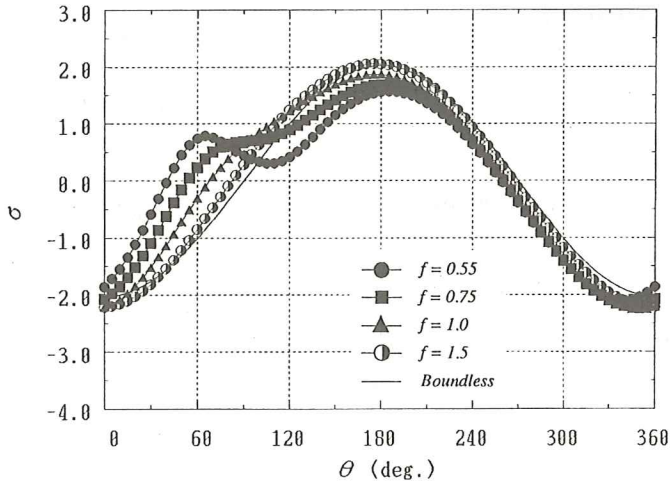


Fig. 6-(a) Circumferential distributions of Kelvin source with the various submerged depths in the case of  $Fn=1$ .

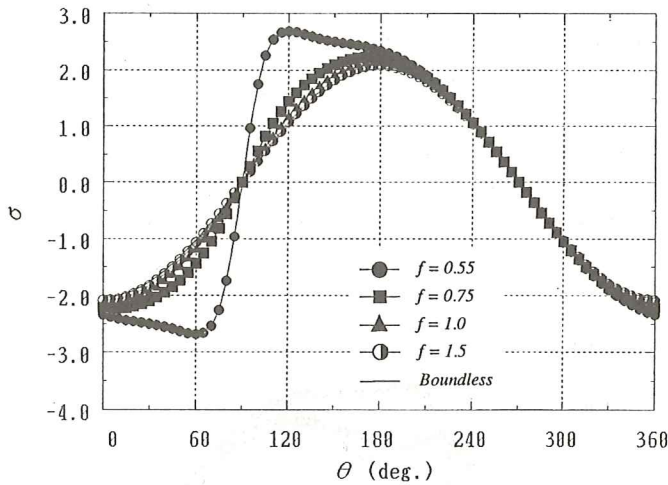


Fig. 6-(b) Circumferential distributions of Rankine source for rigid wall with the various submerged depths.

$$\left. \begin{aligned} c_p &= 2b \\ C_x &= 2F_x \\ C_z &= 2F_z \\ C_B &= 2Z_B = \frac{\pi}{2F_n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

のように、それぞれの無次元値を2倍すればよく、ここに、 $c_p$ が圧力係数、 $C_x$ 、 $C_z$ 、 $C_B$ がそれぞれ圧力積分による造波抵抗係数、造波揚力係数なら

びに静的浮力係数として定義したものである。

### 3. 数値解ならびにその検討

ここでは、前章に示した理論計算法に基づき、没水円筒について Neumann-Kelvin 問題を数値解析した結果について述べる。

3.1 吹き出し分布

Fig. 5, 6 は、離散化された境界積分方程式(4)を解いた結果として得られた、円筒表面上の吹き出し分布である。Fig. 5 は、没水深度  $f=0.75$  の場合について、一様流速  $U$  で無次元化した吹き出し分布  $\sigma$  がフルード数  $Fn$  によって変化する様子を示したものであり、図には Neumann-Kelvin 解 (以下、N-K 解と略記する。) との比較のために、自由表面影響を考慮せず  $G=\log r$  として解いた無限流体中の解と、 $G=\log r+\log R$  として水面を剛壁で置き換えた二重模型解に対する結果も併せて置点してある。この図から、自由表面の影響は、明らかに  $0^\circ\sim 180^\circ$  の上面に顕著に現れており、フルード数が低いほど、生成される波長が短くなって波の位相に起因する造波干渉が相対的に強くなることから、吹き出し分布の  $\theta$  に関する変化が激しく、無限流体中や剛壁条件での解から離れる傾向にある。

Fig. 6-(a) は、 $Fn=1$  の場合の吹き出し分布が、没水深度によって変化する様子を示したものであり、やはり没水深度が浅くなるに連れて、上面で無限流体中の解から離れていく様子がよく現れている。一方、Fig. 6-(b) は、同様な場合の剛壁条件での吹き出し分布の結果であり、Fig. 5 の  $Fn$

数一定の場合と異なり、剛壁解も深度とともに変化するものの、 $f=0.55$  の極端に浅い場合を除き、剛壁解は、無限流体解との差異は、さほど生じないようである。尚、示した計算結果は、境界分割を  $M=72$  ( $\delta\theta=5^\circ$ ) で行ったものであるが、分割を粗くして  $M=36$  ( $\delta\theta=10^\circ$ ) で行っても、吹き出し分布に関する限り、それほど目立った変化は認められなかった。

なお、吹き出し分布の総和  $\sum_{j=1}^M \sigma_j \delta l_j$  を調べてみると、 $M=72$  分割の場合、どの場合も  $O(10^{-17})\sim O(10^{-16})$  程度の値を取っており、本計算が倍精度で行っていることを考えると、ほぼ限界に近い値であり、理論上、吹き出し総和が零になっていると看做し得る。ただ、没水深度が  $f=0.55$  のように極端に浅くなった場合に限り、Rankine Source を用いた無限流体中や剛壁条件の場合が、同様に  $O(10^{-16})$  程度で零となるのに対し、Kelvin Source を用いた N-K 解の場合、 $O(10^{-8})$  程度の値となっている。これは、実用上は零と看做して差し支えない程度の値であるが、前者と較べると、同じ零でも 8 桁程の差異があり、これは物体条件は厳密に満足させるものの、自由表面条件は線型化して扱うことによる Neumann-Kelvin 問題自

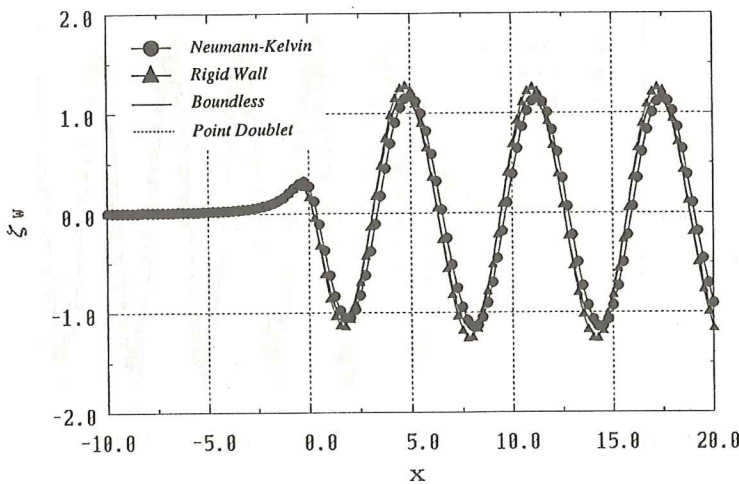


Fig. 7 Calculated wave profiles with the various free surface conditions in the case of  $Fn=f=1$ .



身が内包する理論上の不整合性に起因し、没水深度が極端に浅くなって線型自由表面の仮定が崩れたことにより、その非線型性が吹き出し総和に反映されたものと考えられるが、これには、生成される波長と分割数の関係、更には核関数である造波グリーン関数自身の計算精度にも関わってくるので、更に詳細な計算と検討が必要と思われる、これ以上の議論は差し控える。

### 3.2 波形ならびに圧力分布

Fig. 7, 8, 9の3枚は、前節と同様な場合について、(48)式を用いて、得られた吹き出し分布から生成される波形を描いたものであり、当然のことながら、フルード数が低くなれば後続波の波長が短くなり、没水深度が浅くなれば波高が高くなっている。図には、比較のために、無限流体中や剛壁条件での解、Point Doublet から生ずる波(附録

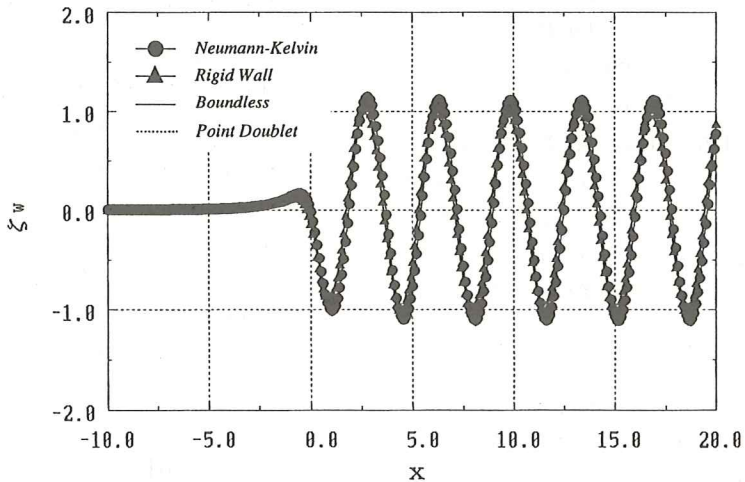


Fig. 8 Calculated wave profiles with the various free surface conditions in the case of  $F_n=0.75$ ,  $f=1$ .

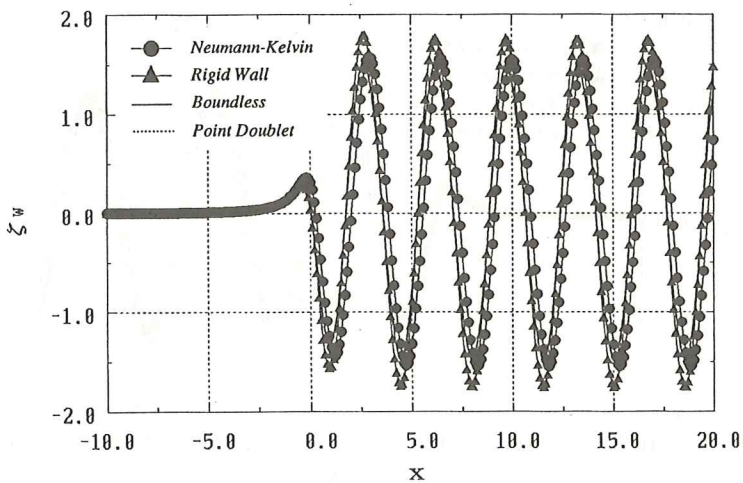


Fig.9 Calculated wave profiles with the various free surface conditions in the case of  $F_n=f=0.75$ .

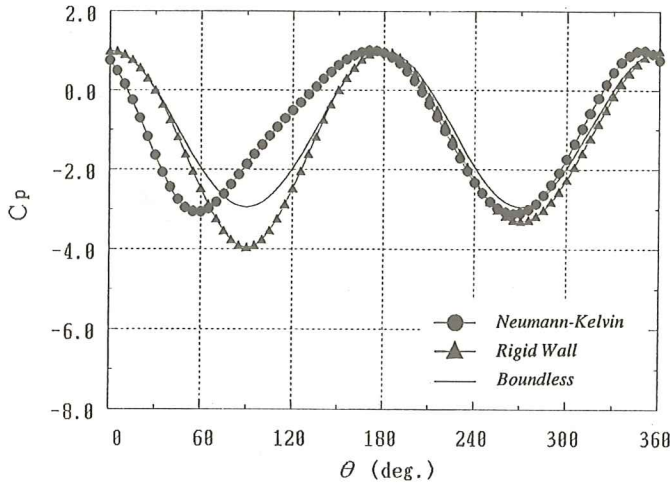


Fig. 10-(a) Circumferential distributions of pressure on the body surface induced by original source in the case of  $F_n=f=1$ .

(B-2)式)についても置点してあるが、これらは前節で得られた  $\log r$  で表される Rankine Source による吹き出し分布を、物体境界条件の乱れを無視して第1近似的に造波グリーン関数  $G$  に置き換えた結果として、生じ得たものである。これらと見較べると、N-K 解は、物体境界条件を波の項まで含めて厳密に満足しているにも拘らず、それを満足しない他の場合から、波形レベルでは、前節

に示した吹き出し分布に現れたほどの目立った差異は生じないものの、N-K 解による波は、他の波に較べて、位相が若干下流側にズレているのが分かる。また、波高の大小関係は、フルード数によっても異なるものの、例えば Fig. 7 では、N-K 解のそれは、僅かではあるが、剛壁解のそれに比して小さめに生じており、結果として次節に示す Fig.12 の造波抵抗値  $C_w$  も、そのフルード数

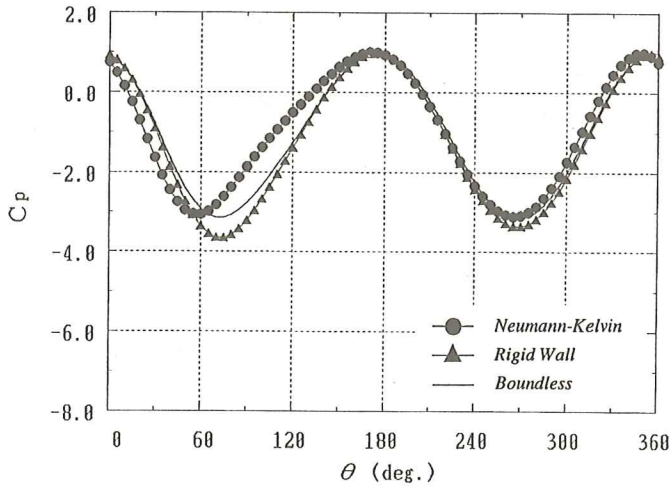


Fig. 10-(b) Circumferential distributions of pressure on the body surface induced by substituted Kelvin source in the case of  $F_n=f=1$ .

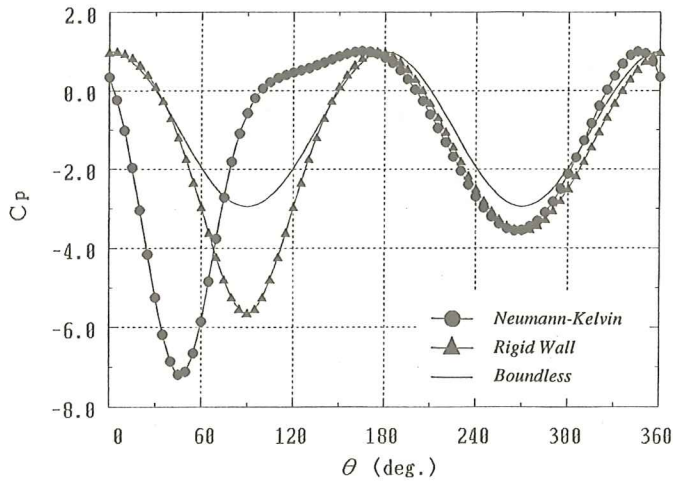


Fig. 11-(a) Circumferential distributions of pressure on the body surface induced by original source in the case of  $F_n=f=0.75$ .

( $F_n=1$ ) で、同様な傾向となっている。

Fig.10, 11は、同様な2つの場合の円筒表面上の圧力係数  $C_p$  の分布を、(59), (61)式を用いて計算した結果である。両図ともに、無限流体中と剛壁条件の場合と比較してあるが、(a)のそれは、対応する境界条件を満たす実際の圧力分布であるのに対し、(b)のそれは、波形の場合と同様、Rankine Source

で得られた吹き出し分布を Kelvin Source で置き換えた結果として得られた圧力分布である。この置き換えによって、それらの圧力分布が、厳密に物体条件を満たす N-K 解に可也り近づくものの、その差異は、波形レベルとは比較にならないほど大きく、圧力分布に及ぼす波動項の物体境界条件の寄与度の大きさが窺われる<sup>13)</sup>。また、自由表面影響は、吹き出し分布の場合と同様、上面に顕著に

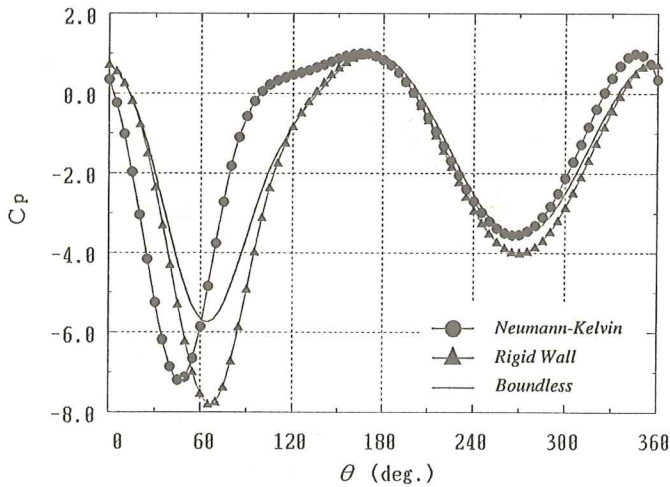


Fig. 11-(b) Circumferential distributions of pressure on the body surface induced by substituted Kelvin source in the case of  $F_n=f=0.75$ .



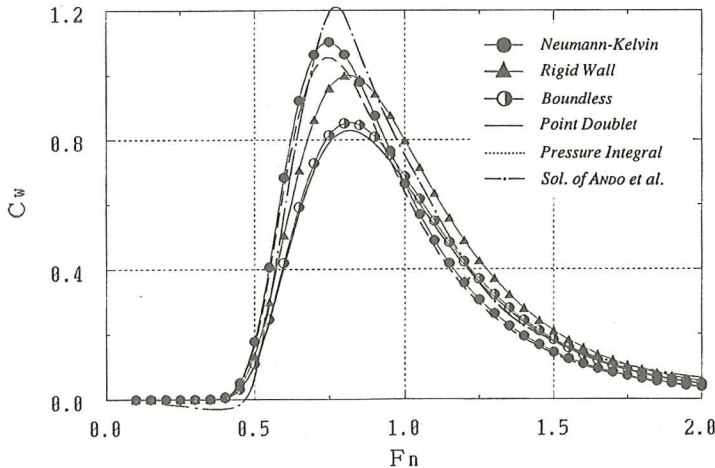


Fig. 12 Comparison of wave-making resistance  $C_w$  calculated by momentum theorem with the various free surface conditions in the case of  $f=1$ .

現れており、特に没水深度の浅い Fig.11の場合、その影響が Fig.10に比して、著しく大きく生じている。

### 3.3 運動量定理と圧力積分による造波抵抗値の比較

Fig.12は、(58)式の運動量定理によって計算した造波抵抗係数  $C_w$  を、没水深度  $f=1$  の場合について、フルード数ベースに置点したものであり、端的には、前節 Fig. 7, 8 に示した後続自由波の波高の自乗と波数の積から求め得る。この図から、N-K 解による造波抵抗曲線は、併せて置点した剛壁条件、無限流体中、Point Doublet の場合に比して、低速側にピークを持つようであり、ピーク値も、Point Doublet による解析解(附録(B-4)式)の1.3倍程度の値となっている。このことから、没水体においても、造波干渉による物体境界条件の乱れを無視し得ないことが分かる。ただし、高速域では、N-K 解による抵抗値は、Point Doublet の場合とほぼ一致しており、これは  $F_n$  数が大きくなると、生成波の波長が円筒径に比して大きくなることから、Fig. 5 の吹き出し分布の場合に現れているように、造波作用による境界条件の乱れが相対的に減ぜられるからであろう。また、剛壁

条件による値は、ピーク時には N-K 解と Point Doublet の中間的な値を取っているが、高速域では逆にそれらより大きめに生じている。更に、同じ N-K 解から圧力積分によって求めた結果と較べて、運動量定理による結果は、若干大きめの値を取っている。この差異は、Fig.14に示すように、分割を今の  $M=72$  から更に細分化することにより、消失する。

一方、最近安東ら<sup>3)</sup>は、Rankine Source 法によって、自由表面条件に二重模型流れに基づく局所流の影響を考慮した計算結果を報告している。ここに、一点鎖線で示すのは、その正鏡像モデルと逆鏡像モデルによる結果の Mean Line であり、抵抗値の算出は圧力積分によって行われている。本論の N-K 解をこれと比較すると、ピーク値は幾分小さめであるものの、全体的にほぼ近い値となっている。この差を、両者が採用した自由表面条件式の違いであるとは、即断できない。なぜなら、Kelvin Source を用いることなく純数値的に得られた安東らの解は、図に見られるような低速側で負値を取るという矛盾を生じていることを勘案すると、ピーク値を含めた造波抵抗値そのものについて、精度の保証に乏しい。これに対し、N-K 解は、Kelvin Source を核関数に用いているため、

波動項に関する後流での漸近挙動が保証されているという点で、解の信頼性が高い。これらのことから、没水体に関する限り、線型理論によっても、造波による攪乱を含めて物体境界条件を満足させることにより、Rankine Source 法と同程度の造波抵抗値を、精度の保証された解として得ることが期待できる。

Fig.13は、同じく  $f = 1$  の場合について、圧力積分によって、(62)式から造波抵抗係数  $C_x$  と造波揚力係数  $C_z$  を求めた例である。比較のために置点した剛壁条件、無限流体中の結果は、波形計算の場合と同様に、解かれた Rankine Source の分布を Kelvin Source で置換して得られた Fig.10-(b) に示す圧力分布を、円筒表面全周に亙って積分して得られた結果であり、抵抗、揚力ともに、N-K 解の半分程度の値しか取っておらず、運動量定理の場合とは異なって、円筒表面上での境界条件が造波作用によって攪乱される影響が、このような結果となって現れているものと考えられ、圧力積分によって造波流体力を算定する際には、慎重な取り扱いを要することを示唆している<sup>13)</sup>。図中、フルード数に拘らず一定値を取っているのは、Fig.10-(a) に示す Rankine Source そのものに

よって生じた圧力から得られた剛壁条件における揚力の値であり、船舶接岸時の Bank Suction に相当し、造波揚力の  $Fn \rightarrow 0$  での低速極限值を与える。同様な操作を行っても、D'Alembert の背理が教えるように、無限流体中の抵抗と揚力、剛壁条件での抵抗は、数値的にも生じていない。

一方、図には、Havelock による解析解も併せて置点しておいた。この解は、抵抗成分については、造波による円筒境界条件の乱れを打ち消すように、反転位置に鏡像を配することにより、圧力積分によって求めたものであり<sup>13)</sup>、Fig.12 に示した Point Doublet の後続自由波から求めた結果（附録(B-4)式）に一致している。揚力成分については、Point Doublet の鏡像点に配した Doublet と、その水平線上に線分布させた Line Doublet によって、第1近似的に自由表面変形の影響を表し、Blasius の第1公式を使って巧妙な方法で求めたものであり<sup>9)Eq.21</sup>、本論の表記に書き改めれば、

$$C_z = -\frac{\pi}{16} \cdot \{1 + 2x_0f + 4(x_0f)^2 - 8(x_0f)^3 e^{-2x_0f} \cdot li(e^{2x_0f})\} \quad (64)$$

のように、与えられる。ここに、 $li$  は、積分対数関数であり、

$$li(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\log \xi} \quad \dots\dots\dots (65)$$

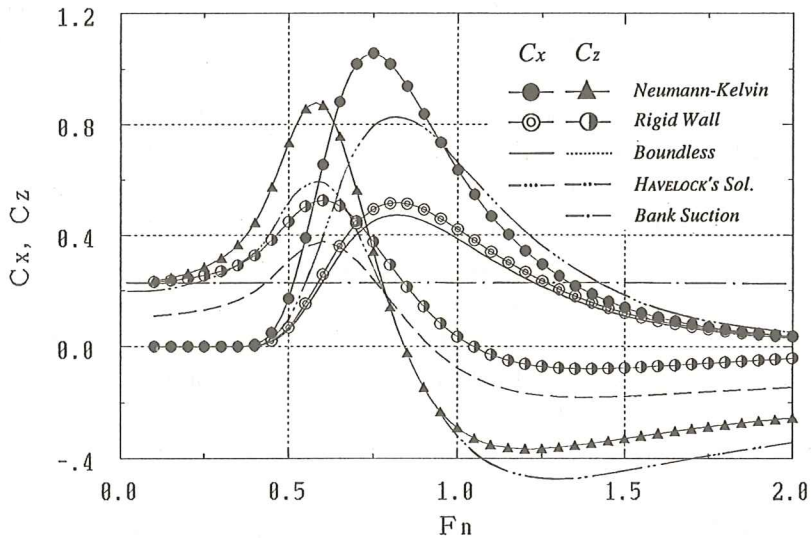


Fig. 13 Comparison of wave-making resistance  $C_x$  and lift  $C_z$  calculated by pressure integral with the various free surface conditions in the case of  $f=1$ .

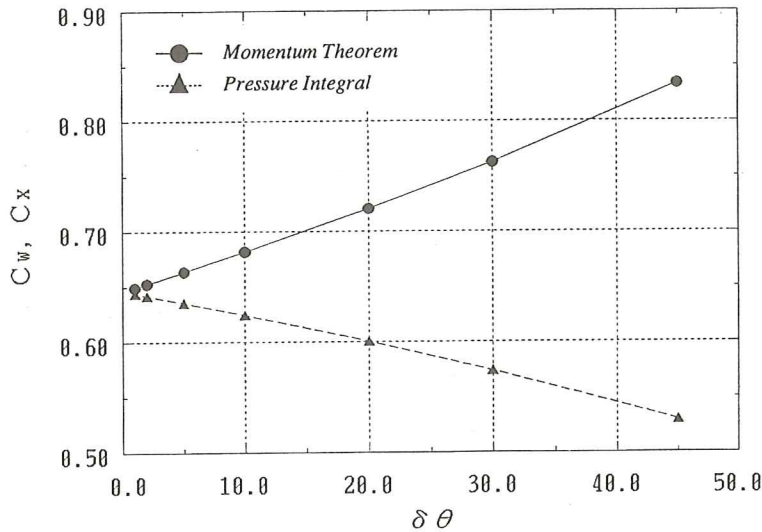


Fig. 14 Effects of the number of divided elements on the value of wave-making resistance calculated by both momentum theorem and pressure integral in the case of  $F_n=f=1$ .

で、定義されている。

上記のようにして得られた Havelock の解析解は、抵抗については、ピーク時には、円筒境界条件における造波干渉を厳密に考慮した N-K 解と、それを無視した剛壁解や無限流体解との中間的な値を取っており、高速域では、生成される波長が円筒径に比して大きくなるため、造波干渉が相対的に減ぜられることから、どの方法によっても同一の値に収束するようである。また、揚力については、正值の浮上揚力を示す低速域では、ほぼ剛壁条件程度の値であり、N-K 解と比較すると、抵抗の場合より一層過小算定となっているのに対し、負値の沈下揚力となる高速域では、逆に N-K 解より過大に見積もる傾向にあり、N-K 解との比較は定性的な範囲に留まっている。このように、揚力算定の場合については、抵抗の場合にも増して、造波干渉を含めて、物体境界条件を正しく合わせて解かないと、正しい結果が得られないことが分かる。

Fig.14は、運動量定理と圧力積分による造波抵

抗値の収束状況の比較を、分割数を種々変化させて行ったものであり、計算は、没水深度  $f=1$  の場合について、フルード数を  $F_n=1$  で固定して行った。このように、横軸を分割要素の挟角  $\delta\theta$  に採って抵抗値を置点してみると、 $\delta\theta$  に拘らず、運動量定理による値  $C_w$  が、圧力積分に基づく  $C_x$  よりも大きめに計算される傾向にある。しかしながら、分割数を増して  $\delta\theta$  が小さくなるに連れて、 $\delta\theta=45^\circ$  ( $M=8$ ) の極端に粗い分割の場合も含めて、両者の造波抵抗値が、ほぼ線型的にある一定値に収束していく状況となっており、本境界要素法による計算が、線型理論に基づいて正しく解けていることを示している。この図から、境界分割を  $M=72$  ( $\delta\theta=5^\circ$ ) で行った場合、計算された  $C_w, C_x$  の値は、真値の  $\pm 2\%$  程度の誤差を含んでいることが分かる。

### 3.4 造波抵抗と造波揚力

Fig.15は、フルード数ベースの造波抵抗ならびに造波揚力曲線を、3種の没水深度について描いたものであり、置点した結果は、Fig.14と同様、分



割を  $M=72$  として、圧力積分して求めたものである。造波に基づく抵抗と揚力の両成分は、オーダー的には同程度の値を取っている。ただ、揚力値は、低速時には正値を取るものの、高速域では負の値を取って沈下方向に作用するようである。ただし、正揚力の場合は明確なピークを持つのにに対し、負値の場合は際立ったピークも生じず、絶対値そのものも正揚力に較べて可也り小さいようである。また、揚力  $C_z$  のピークは、抵抗  $C_x$  のそれより可也り低速側に生ずるようであり、没水深度が浅くなるほど、両成分ともその絶対値が大きくなるのみならず、そのピークが共に低速側に移動する傾向がある。参考のために、(60)式に示す静的浮力についても置点しておいたが、 $f=0.75$  の場合の抵抗値と同程度のオーダーであり、通常の没水深度における揚力値に較べて、可也り大きな値である。

なお、両成分が没水深度の影響を強く受けることが分かり、特に深度  $f$  が 1 以下になると、僅かに没水深度が浅くなるだけで、流体力が相当大きくなる様子が現れている。

#### 4. おわりに

没水円筒を対象に、Neumann-Kelvin 問題を数値解析し、分割数の影響、運動量定理と圧力積分による造波抵抗値等、種々の問題について検討したところ、凡そ次のような結論を得た。

- 1) 造波抵抗値を、後続自由波の漸近挙動に基づく運動量定理と物体表面上の圧力積分の両面から算定したところ、一般に運動量定理による値の方が、圧力積分値よりも大きめに算定される傾向にあるものの、境界要素の分割数の増加とともに、両者が線型的にある一定値に収束することを確認し、解法に用いた境界積分方程式法の妥当性を検証した。
- 2) 圧力積分による抵抗や揚力値は、造波干渉による境界条件に敏感に左右されるため、運動量定理に基づいて造波抵抗を算定する場合に較べて、慎重な取り扱いを要することが分かった。

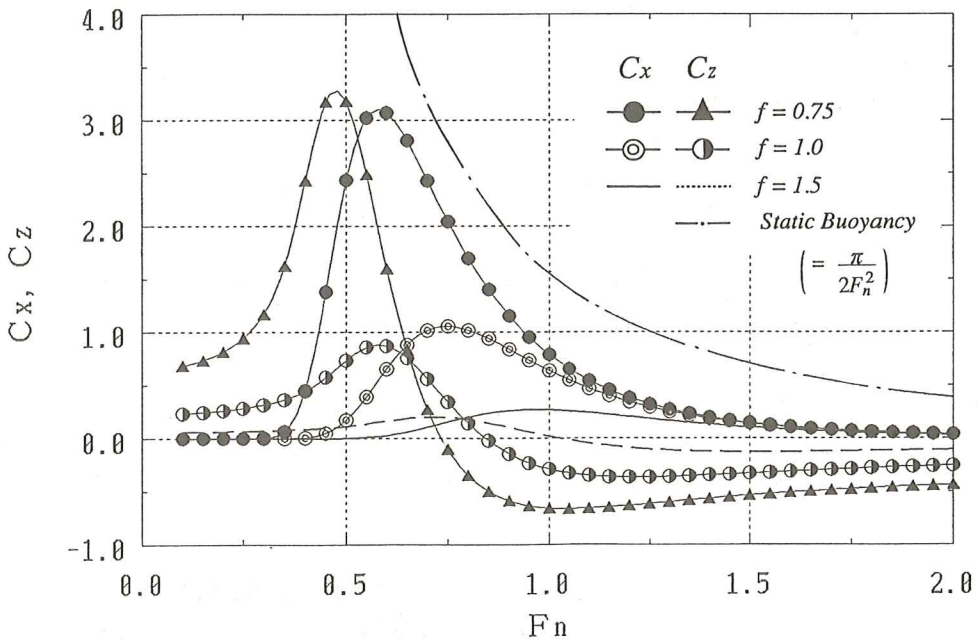


Fig. 15 Wave-making resistance  $C_x$  and lift  $C_z$  calculated by pressure integral with the various submerged depths.

3) 没水体の場合、造波に基づく抵抗と揚力の両成分は、オーダー的には同程度の値を取るようであり、設計の際に、造波揚力についても、十分に配慮する必要があることを示した。ただ、揚力値は、ピーク時には正值をとるものの、高速側では負の値を取って沈下方向に作用するようであり、そのピークも、抵抗のそれより、可也り低速側に生ずることが分かった。また、両成分が、没水深度の影響を強く受けることが分かり、特に物体径に対する相対深度が1以下になると、僅かに没水深度が浅くなるだけで、流体力が相当大きくなる点には注意を要する。

以上、N-K解が、少なくとも没水体に関する限り、Rankine Source 法等の数値解法と較べても遜色のない結果を、十分な計算精度でもって供し得る解法であることが分かった。本論では、他の解法との比較の意味もあって没水円筒について計算を行ったが、この解法は物体形状に関する制約がなく、楕円体や翼型等の任意形状物体への拡張が容易であるという優位性を持つ。今後、第1報で得られた基礎資料をもとに、自由表面貫通物体や3次元問題への拡張を試みたい。

本研究を行うに当たり、随所で本学・船舶工学科教授・神中龍雄先生に適切なお助言を戴きました。ここに記して、篤くお礼申し上げます。また、本論文の数値計算には、本学・情報科学センターのワークステーション NEC-EWS4800/30 (OS: EWS-UX/V [Rel. 2.0]) のCコンパイラと科学技術計算ライブラリASLを使用し、グラフの作成は、同機のアプリケーション・ソフト: 研究開発支援システム micro-RESEARCHER II/B (表データ処理編) によるものである。尚、本研究は、文部省の平成4年度・科学研究費補助金(奨励研究(A): 課題番号04750444)の助成を受けて行われた。ここに、関係各位に感謝の意を表する次第である。

## 参考文献

- 1) NEWMAN, J.N.: Applications of Slender-Body Theory in Ship Hydrodynamics, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 2 (1970), California, pp. 67~94.
- 2) 安東 潤, 中武一明: Rankine Source 法による波流れの一計算法: 西部造船会々報, 第75号 (Mar. 1988), pp. 1~12.
- 3) 安東 潤, 片岡克巳, 中武一明: 超高速域における Rankine Source 法について: 西部造船会々報, 第83号 (Aug. 1992), pp. 1~10.
- 4) BRARD, R.: The Representation of a Given Ship Form by Singularity Distributions when the Boundary Condition on the Free Surface is Linearized, Jour. of Ship Research, Vol. 16 (1972).
- 5) 堤 孝行: 船体表面上吹き出し分布による船の造波抵抗について: 西部造船会々報, 第51号 (Mar. 1976), pp. 269~285.
- 6) 石井規夫, 田中一朗, 木村 朗: Neumann-Kelvin 造波問題の実用船型数値解析, 関西造船協会誌, 第189号 (Jun. 1983), pp. 65~70.
- 7) 日下祐三, 乾 崇夫, 梶谷 尚: 自由表面条件を考慮した船型の等価特異点分布とくに線積分効果について: 日本造船学会論文集, 第138号 (Dec. 1975), pp. 12~22.
- 8) 加用芳男: A Note of the Uniqueness of Wave-Making Resistance when the Double-Body Potential is Used as Zero-Order Approximation: 西部造船会々報, 第55号 (Mar. 1978), pp. 1~11.
- 9) HAVELOCK, T.H.: The Vertical Force on a Cylinder Submerged in a Uniform Stream, Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 122 (Nov. 1928), London, pp. 387~393.
- 10) FALTINSEN, Odd M.: A Numerical Non-linear Method of Sloshing in Tanks with Two-Dimensional Flow, Jour. of Ship Research,

Vol. 22, No. 3 (Sept. 1978), pp. 193~202.

- 11) 堀 勉: Blunt な船首の起こす波について, 長崎総合科学大学・修士論文 (Mar. 1983).
- 12) 堀 勉: 斜航する船の波に対する横切断波形解析法について—1枚の横切断波形を用いた Fourier 変換法の提案—, 関西造船協会誌, 第212号 (Sept. 1989), p.19~43.
- 13) HAVELOCK, T.H.: Some Cases of Wave Motion due to a Submerged Obstacle, Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 93 (May 1917), London, pp. 520~532.
- 14) ARFKEN, George (権平・神原・小山共訳): 関数論—基礎物理数学 2—, 講談社 (Jan. 1978).

附 録 A 積分指数関数  $Ei$  の計算法

ここでは, 2.3.1節(7)式に示した造波グリーン関数の局所擾乱項  $G_i$  の計算に必要な, 複素数域に拡張された積分指数関数  $Ei$  の計算法として, 級数展開式と漸近展開式による方法について述べるとともに, 両者による計算例を示す。

複素数  $Z$  に対して定義された  $Ei(-Z)$  は,

Gauss 平面  $w = \xi + i\eta$  上で, 積分経路を変更することにより,

$$Ei(-Z) = - \int_Z^\infty \frac{e^{-w}}{w} dw$$

$$= \left\{ \int_0^1 \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} d\xi - \int_1^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right\} - \int_Z^1 \frac{dw}{w}$$

$$- \int_0^Z \frac{1-e^{-w}}{w} dw \dots\dots\dots (A-1)$$

のように分解され, 中括弧で括った第1項と第2項の和は, Euler 定数を表し, 第3項は明らかに対数関数となる。第4項は, 被積分関数を,  $w=0$  回りに Taylor 級数に展開した後, 項別積分すれば,

$$[4th. \text{ term of } Ei(-Z)] = \sum_{n=1}^\infty \int_0^Z \frac{(-1)^n w^{n-1}}{n!} dw$$

$$= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{Z^n}{n \cdot n!} \dots\dots\dots (A-2)$$

となるから, 結果として,  $Ei(-Z)$  に対する級数展開式として,

$$Ei(-Z) = \gamma + \log_e Z + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-Z)^n}{n \cdot n!}$$

但し,  $\gamma = 0.57721\dots\dots$  (Euler の定数)  
..... (A-3)

を得る。

一方,  $|Z|$  が充分大きいときの漸近形は, 部分積

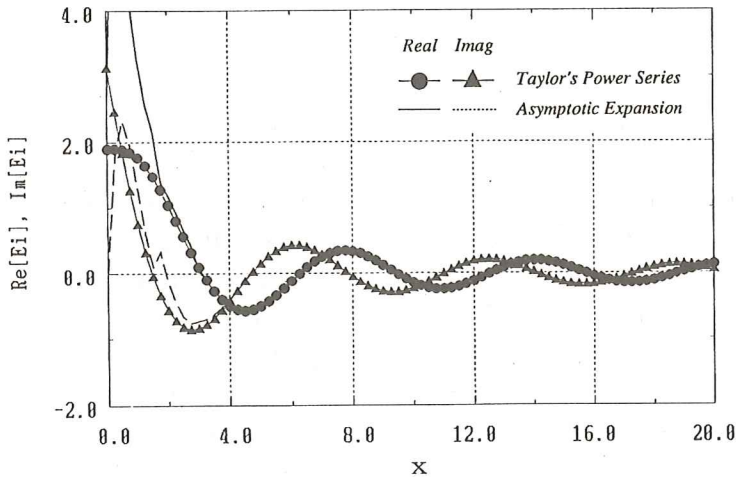


Fig.A-1 Real and Imaginary Parts of Exponential Integral on  $z=0$  calculated by both Taylor's series and asymptotic expansion for  $x \rightarrow 0$  in the case of  $F_n=1, x'=0, z'=-1$ .



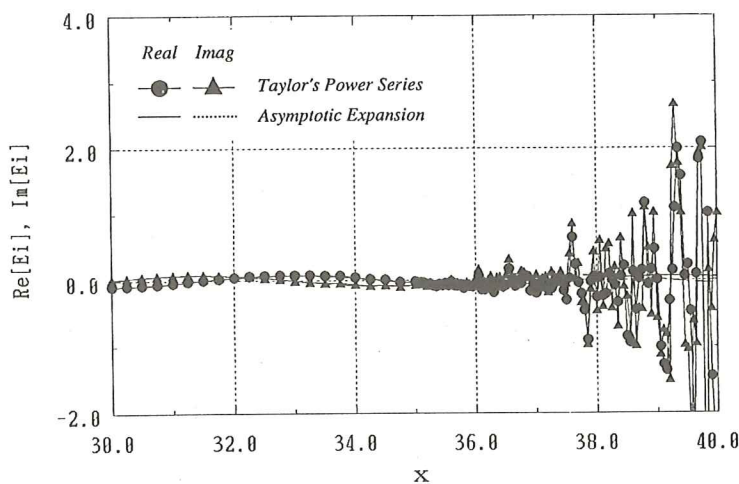


Fig. A-2 Real and Imaginary Parts of Exponential Integral on  $z=0$  calculated by both Taylor's power series and asymptotic expansion for  $x \rightarrow \infty$  in the case of  $F_n=1, x'=0, z'=-1$ .

分を  $N$  回繰り返すことにより,

$$Ei(-Z) = e^{-z} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(n-1)!}{Z^n} + (-1)^{N+1} N! \int_z^{\infty} \frac{e^{-w}}{w^{N+1}} dw \quad \dots\dots (A-4)$$

となる。但し、この第1項は漸近級数であり、第  $n+1$  項と第  $n$  項の比を取り、 $Z$  を固定して項数  $n$  を増やしていくと、

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{Z} \rightarrow \infty \quad (\text{as } n \rightarrow \infty) \quad \dots\dots (A-5)$$

となるから、d'Alembert の比率判定法<sup>14)P.13</sup>によって、発散する。

しかしながら、第2項の積分値は、 $Ei$  の真値と部分 and (第1項) の差  $\Delta$  を与え、その絶対値は、

$$\left. \begin{aligned} |\Delta| &= N! \int_z^{\infty} \frac{e^{-w}}{w^{N+1}} dw \\ &\leq N! \int_z^{\infty} \frac{dw}{w^{N+1}} = \frac{(N-1)!}{Z^n} \rightarrow 0 \quad (\text{as } |Z| \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \quad (A-6)$$

のように押えられ、項数  $N$  を固定して  $|Z|$  を充分大きくしていけば、この漸近級数の部分 and が、真値のいくらでも良い近似値になることを示している。

したがって、 $Z$  を固定した場合、(A-5) 式の比が 1 を越えた時点、即ち、

$$\frac{N}{|Z|} \leq 1 \quad \dots\dots (A-7)$$

を、打ち切り項数の条件として採用すれば、この漸近級数によって、充分な精度で遠方の  $Ei$  を算定することが可能であり、数値計算上の優位性を持つ。

Fig.A-1 には、本論2.3.1節(28)式に示す  $Ei$  の実部と虚部を、 $x_0=1, x'=0, z'=-1$  の場合について、 $z=0$  に於ける値を、それぞれ  $x$  軸を横軸に採って置点したものである。マークしてあるのが、(29)式に示す級数解による結果であり、比較のために実線と破線で示すのが、(32)式の漸近展開式による結果である。これを見ると、漸近解は、その性質上、 $x=0$  の付近では破綻しているものの、 $x > 4$  の範囲では、漸近解と級数解は、図で見る限り、全く一致しているのが分かる。

一方、Fig.A-2 は、同様な状態での、両者の遠方での関数値を比較したものである。この図から、漸近解の方は、遠方で単調に減衰しているにも拘らず、級数解によって計算した値は、 $x > 36$  の辺りから、計算機内部での桁落ちの影響が生じ、その値が振動的に発散の傾向にある。

本論でのグリーン関数の計算は、上記積分指数関数の性質を踏まえて、 $x_0 R < 13$ の範囲では級数解によって、その他の領域では漸近展開式によって行った。

附 録 B 2次元Point Doubletの波と造波抵抗

点  $Q(0, -f)$  に置かれ、無限流体中で直径 1 の円筒を表し、(4)式の自由表面条件 [F] を満足する、Point Doublet のポテンシャル  $\phi_D$  は、本論 (19)式に示す造波グリーン関数  $G$  (Kelvin Source のポテンシャル) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \phi_D &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x} G(x, z; 0, -f) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\log_e r + G) = \frac{1}{4} \left( \frac{x-x'}{r^2} + \frac{\partial G'}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (B-1)$$

のように、求めることができる。これに伴い、この Doublet から生成される波  $\zeta_D$  についても、(28)

式で定義した  $E_c, E_s$  を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_D &= -\frac{1}{x_0} \cdot \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{4x_0} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{x_0 - \kappa_0 f}{2} \cdot \{E_c \cos \kappa_0 x |x| - E_s \sin \kappa_0 x |x|\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{x^2 + f^2} - \pi \kappa_0 e^{-\kappa_0 f} \sin \kappa_0 x \cdot \left\{ \frac{1 + \text{sgn}(x)}{2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (B-2)$$

のように、記すことができる。上式の  $x \rightarrow \infty$ での漸近挙動としては、局部攪乱を表す第 1 項と第 2 項は消失し、第 3 項の後続自由波のみが残ることから、その振幅  $\bar{\zeta}_D$  は、

$$\bar{\zeta}_D = \pi \kappa_0 e^{-\kappa_0 f} \dots\dots\dots (B-3)$$

となり、これを(58)式に代入することにより、造波抵抗係数  $C_D$  も、

$$C_D = \frac{1}{2} \pi^2 \kappa_0^3 e^{-2\kappa_0 f} \dots\dots\dots (B-4)$$

のように、求め得る<sup>9),13)</sup>。