無限次元システムの有限次元補償器による内部安定化問題

日　當　明　男*

On the Internal Stabilizability Problem of Infinite Dimensional Linear Systems by Finite Dimensional Compensators

Haruo HINATA

Abstract

In the previous report[10], we discussed the construction of input-output (or externally) stabilizing compensators with finite dimensions for a class of unstable infinite dimensional systems. We specified the design algorithm and the dimensions of the compensators. In this report, the same problem is considered for a larger class of systems than that in [10]. Moreover, we show that a finite dimensional compensator which is constructed using the design algorithm given in [10] stabilizes internally the joint system of the original system and the compensator.

1．はじめに

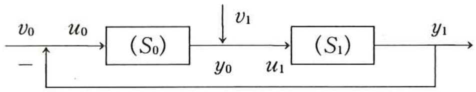
システムの安定性には，内部安定性と外部（または入出力）安定性の2つの概念があり，これらの安定性はともに，そのシステム固有の性質である。しかし，2つのシステムを連結して閉ループを構成させることによって，個々のシステムの安定特性を全体のシステムの安定特性に変換させることができる。このことを用いて，不安定なシステムに他のシステムを連結して，全体として安定にできるかどうかということは非常に興味深い。このような問題を安定化問題という。

2つのシステム (S_0)，(S_1) がそれぞれ次の表現を持つとする。

$$(S_0)\quad \begin{cases} \dot{z}(t)=A_0z(t)+B_0u_0(t) \\ y_0(t)=C_0z(t) \end{cases}$$

$$(S_1)\quad \begin{cases} \dot{x}(t)=A_1x(t)+B_1u_1(t) \\ y_1(t)=C_1x(t) \end{cases}$$

このとき，$v_0(t)$，$v_1(t)$ を外部入力として，$u_1(t)=v_1(t)+y_0(t)$，$u_0=v_0(t)-y_1(t)$ のように2つのシステムを連結すると下図のような結合システム (S_0, S_1) が得られる。



この結合システム (S_0, S_1) は，入力を (v_0, v_1)，出力を (y_0, y_1)，状態を (x, z) とするとき

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1C_0 \\ -B_0C_1 & A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

なる表現を持つ。安定化問題とは，与えられた不安定なシステム (S_1) に対して，結合システム (S_0, S_1) が安定となるようなシステム (S_0) が構成できるかどうか，または，いかなる条件の下にそのような (S_0) が構成できるかという問題である。結合システム (S_0, S_1) を内部安定（外部安定）にするようなシステム (S_0) は内部安定化（外部安定化）補償器と呼ばれる。前報告[10]

---

*情報・制御工学コース助手
1990年10月31日受付

では，不安定な無限次元システム(S_1)のあるクラスに対して，結合システム(S_0, S_1)を外部安定([10]においては，入出力安定)にする有限次元補償器(S_0)の存在と構成法をその次元も含めて示した。今回は結合システムの内部安定化について考察する。

これまでの安定化問題に対する研究[1]-[9]の多くは，結合システムの内部安定化を意図したものであったが，そのほとんどは補償器の構成法を明確に述べてはいないように思われる。Schumacher[5]は，連続なB_1, C_1を持つシステム(S_1)に対して，有限次元内部安定化補償器(S_0)の存在について考察し，ある条件の下での補償器の存在定理の証明を構成的な方法で与えた。しかし，補償器の次元を含めて，その構成法はやや試行錯誤的である。示村他[8]はSchumacherの考え方に沿って，むだ時間システムに対する安定化補償器の構成法を示しているが，まだ試行錯誤的な部分も見受けられる。このように，これまでの研究において，内部安定化補償器の存在性は示されてきたが，その構成法についてはまだまだ研究の余地が残されているように思われる。

そこで本報告では，前報告の結果がより広いシステムのクラスに対して適用できることを示す。さらに，外部安定化補償器が結合システムの内部安定化をも達成していることを示すことによって，内部安定化補償器の次元を含めた構成法について考察する。

第2節では，本報告において必要となる数学的事項とシステムの基本的な概念及びその性質についてまとめる。第3節では，前報告[10]の結果が少し広いシステムのクラスにまで適用され，有限次元外部安定化補償器が得られることを示す。第4節では，この外部安定化補償器が，結合システムの内部安定化をも達成していることを示す。最後に第5節において結論と今後の課題について述べる。

2．準備と基本的な定義

XとYをHilbert空間とし，X上で定義されYに値をとる有界線形作用素の全体を$B(X;Y)$と表わす。また$B(X;X)$は$B(X)$と略す。線形作用素Aに対して，その定義域を$D(A)$，レゾルベント集合を$\rho(A)$，スペクトルと点スペクトル（固有値の集合）をそれぞれ$\sigma(A)$，$\sigma_p(A)$と表わす。

閉線形作用素Aのスペクトルの孤立点$\lambda\in\sigma_p(A)$に対して，次のような作用素を定義する。

(2.1)
$$E(\lambda)x := \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1}x\,d\lambda \qquad (x\in X, j=\sqrt{-1})$$

ここで，Γは$\lambda\in\sigma_p(A)$を囲む$\rho(A)$内の充分小さな円である。この作用素は有界かつ線形となり，固有値λに対する固有射影作用素と呼ばれる。固有射影作用素は$D(A)$の中にその値を取り，値域$E(\lambda)X$は，固有値λに対する（一般化）固有空間と呼ばれ，その次元$\dim E(\lambda)X$は固有値λの（代数的）重複度と呼ばれる。次の定理はよく知られている。

(2.2) 定理[13, pp. 177-273]

閉線形作用素$A:(D(A)\subset X)\to X$がコンパクトレゾルベントを持つ，すなわち，すべての$\lambda\in\rho(A)$に対して，レゾルベント$R(\lambda;A)=(\lambda I-A)^{-1}$がコンパクト作用素となるとき，閉作用素$A$の有限なスペクトルは離散固有値のみとなり，スペクトル$\sigma(A)$は有限な集積点を持たない。さらに各固有値の重複度は有限である。■

閉線形作用素$A:(D(A)\subset X)\to X$がX上の(C_0-)半群$\{S(t);t\geqq 0\}$の生成作用素であるとする。このとき適当な実数ω, M_ωを取ると，半群$\{S(t);t\geqq 0\}$において

$$\|S(t)\|\leqq M_\omega e^{\omega t} \quad (t\geqq 0)$$

が満たされる。上式を満たすようなωの下限は

(2.3)
$$\omega_0 := \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|S(t)\|$$

で与えられる。また半平面$\boldsymbol{C}_{\omega_0}:=\{\lambda\in\boldsymbol{C};Re\,\lambda>\omega_0\}$は，$A$のレゾルベント集合$\rho(A)$に含まれる。すなわち，$\boldsymbol{C}_{\omega_0}\subset\rho(A)$となる。(2.3)式で与えられる値$\omega_0$は，生成作用素$A$または半群$\{S(t);t\geqq 0\}$の発展定数と呼ばれる。次の2つの定理はよく知られている。

(2.4) 定理[13, p. 277]

生成作用素$A:(D(A)\subset X)\to X$がコンパクトレゾルベントを持ち，かつ正規作用素である，すなわち

$$AA^*x=A^*Ax \quad (x\in D(AA^*)=D(A^*A))$$

が満たされるとする。このとき任意の$\omega>\omega_0$に対して，$\boldsymbol{C}_\omega\subset\rho(A)$かつ

$$\|R(s;A)\|\leqq\frac{1}{Re\,s-\omega} \quad (s\in\boldsymbol{C}_\omega)$$

がなりたつ。ここで，ω_0は生成作用素Aの発展定数である。■

(2.5) 定理[1], [10], [13, p. 178]

半群$\{S(t);t\geqq 0\}$が解析的であり，その生成作用素Aがコンパクトレゾルベントを持つとする。また半群

$\{S(t);\, t \geqq 0\}$ の発展定数を ω_0 とする。このとき，次が成り立つ。

(i) $\omega_0 = \sup\{Re\,\lambda\,;\, \lambda \in \sigma_p(A)\}$

(ii) 任意の実数 γ に対して，$\sigma_\gamma := \sigma(A) \cap \overline{C_\gamma} = \{\lambda \in \sigma_p(A)\,;\, Re\,\lambda \geqq \gamma\}$ は高々有限集合である。

(iii) 任意の $\gamma \leqq \omega_0$ に対して $\sigma_\gamma \neq \phi$ である。このとき $\sigma_\gamma = \{\lambda_i\,;\, i=1, 2, \cdots, k, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)\}$ とおき，線形作用素 Π_γ を

$$\Pi_\gamma := E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \cdots\cdots + E(\lambda_k)$$

と定義すると，$X_\gamma := \Pi_\gamma X,\, X_\gamma^+ := (I - \Pi_\gamma)X$ はともにA-不変部分空間となり，かつ $X = X_\gamma \oplus X_\gamma^+$, $X_\gamma \subset D(A)$

$$X_\gamma = E(\lambda_1)X \oplus E(\lambda_2)X \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k)X$$

$$0 < \dim X_\gamma = \sum_{i=1}^{k} \dim E(\lambda_i)X < \infty.$$

さらに，Aの X_γ への制限 A_γ は，有限次元空間 X_γ 上の有界線形作用素となり，$\sigma_p(A_\gamma) = \sigma_\gamma$ となる。一方Aの X_γ^+ への制限 A_γ^+ は，γ 未満の発展定数を持つ X_γ^+ 上の半群の生成作用素となり，$\sigma(A_\gamma^+) = \sigma(A) - \sigma_\gamma$ となる。またXの分解 $X_\gamma \oplus X_\gamma^+$ に対して，生成作用素Aは

$$A = \begin{bmatrix} A_\gamma & 0 \\ 0 & A_\gamma^+ \end{bmatrix}$$

なる表現をもつ。 ■

次に，システムに関する基礎的な事柄についてまとめる。Xを可分な Hilbert 空間(有限次元であってもよい)，U，Yを有限次元空間とする。線形作用素 $A: (D(A) \subset X) \to X$ をX上の半群 $\{S(t);\, t \geqq 0\}$ の生成作用素とし，$B \in B(U; X)$，$C \in B(X; Y)$ とする。このときシステムは次式で表わされるものとする。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.6}$$

作用素A，B，Cはそれぞれシステム(2.6)のシステム作用素，入力作用素，出力作用素と呼ばれ，空間X，U，Yはそれぞれシステムの状態空間，入力空間，出力空間と呼ばれる。状態空間Xが無限次元のとき，システム(2.6)は無限次元システムと呼ばれ，Xの次元が有限のとき，有限次元システムと呼ばれる。またこのとき，Xの次元 $\dim X$ はシステムの次元と呼ばれる。(2.6)式の形に記述されるシステムはシステム (C, A, B) とも表わされる。システム作用素Aの発展定数はシステムの発展定数とも呼ばれる。システム(2.6)に対して，次のような概念を導入する。

(2.7) 定義[10]

(i) システム(2.6)が内部安定（または，単に安定）であるとは，

$$\|S(t)\| \leqq Me^{-\alpha t} \quad (t \geqq 0)$$

を満たす正数M，αが存在することである。

(ii) システム(2.6)が外部安定(または，入出力安定)であるとは，

$$\|CS(t)B\| \leqq Me^{-\alpha t} \quad (t \geqq 0)$$

を満たす正数M，αが存在することである。 ■

この定義から容易にわかるように，システムが内部安定ならばそのシステムは外部安定となる。またシステムが内部安定であるための必要十分条件は，そのシステムの発展定数が負になることである。

最後に有限次元システムの基本的な性質について述べる。システム(2.6)の状態空間Xを有限次元とする。このとき，X，U，Yに適当な基底をとると線形作用素A，B，Cはすべて行列として表現され，特に半群 $\{S(t);\, t \geqq 0\}$ は，各 $t \geqq 0$ において，

$$S(t) = e^{At}$$

と表わされ，状態遷移行列と呼ばれる。またシステム作用素(行列) Aのスペクトル $\sigma(A)$ は有限個の固有値のみからなり，定理(2.5)と同様の定理が成立する。

(2.8) 定理

有限次元システム(2.6)の発展定数を ω_0 とする。任意の $\delta \leqq \omega_0$ に対して，$\sigma_\delta = \{\lambda \in \sigma(A);\, Re\,\lambda \geqq \delta\} \neq \phi$ となる。また適当な有限次元部分空間 X_δ，X_δ^+ を選ぶとき，X_δ，X_δ^+ はともにA-不変部分空間となり，$X = X_\delta \oplus X_\delta^+$ となる。さらに，A_δ，A_δ^+ をそれぞれAの X_δ，X_δ^+ への制限とすると，$\sigma(A_\delta) = \sigma_\delta$, $\sigma(A_\delta^+) = \sigma(A) - \sigma_\delta$ となる。この状態空間Xの分解 $X_\delta \oplus X_\delta^+$ によって，システム(2.6)は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_\delta(t) \\ x_\delta^+(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\delta & 0 \\ 0 & A_\delta^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta(t) \\ x_\delta^+(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\delta \\ B_\delta^+ \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [C_\delta \;\; C_\delta^+] \begin{bmatrix} x_\delta(t) \\ x_\delta^+(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

のように表現できる。ここで，C_δ, C_δ^+ はそれぞれCの X_δ，X_δ^+ への制限であり，Π_δ をXから X_δ への X_δ^+ に沿った射影とするとき，$x_\delta(t) = \Pi_\delta x(t),\, x_\delta^+(t) = (I - \Pi_\delta)x(t),\, B_\delta = \Pi_\delta B,\, B_\delta^+ = (I - \Pi_\delta)B$。 ■

有限次元システムにおいて，次の概念は重要である。

(2.9) 定義[11]

(i) 有限次元システム(2.6)が可安定であるとは，適当な線形作用素（行列）$F \in B(X; U)$ を選んで，$A + BF$ のすべての固有値の実部を負にできるこ

とである。すなわち，$A+BF$ の発展定数を負にできることである。

(ii) 有限次元システム(2.6)が可検出であるとは，適当な線形作用素（行列）$G\in B(Y;X)$ を選んで，$A+GC$ のすべての固有値の実部を負にできることである。すなわち，$A+GC$ の発展定数を負にできることである。■

これらの定義に関連して，次の定理が知られている。

(2.10) 定理[11]

有限次元システムが，(2.6)式によって記述されているとする。このとき(i)-(vi)が成り立つ。

(i) システム(2.6)が可制御ならば，任意の実数 α に対して

$$\|e^{(A+BF)t}\|\leqq M_\alpha e^{\alpha t}\ \ (t\geqq 0)$$

を満たす線形作用素（行列）$F\in B(X;U)$ と定数 M_α が存在する。すなわち，$A+BF$ の発展定数が α 以下となる。またこのとき，

$$\|(sI-A-BF)^{-1}\|\leqq\frac{M_\alpha}{Re\ s-\alpha}\ \ (s\in C_\alpha)$$

となる。

(ii) 可制御なシステム(2.6)は可安定である。

(iii) システム(2.6)が可安定であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}[\lambda I-A\quad B]=\dim X\ \ (\lambda\in\overline{C_0})$$

が成り立つことである。

(iv) システム(2.6)が可観測ならば，任意の実数 α に対して

$$\|e^{(A+GC)t}\|\leqq M_\alpha e^{\alpha t}\ \ (t\geqq 0)$$

を満たす線形作用素（行列）$G\in B(Y:X)$ と定数 M_α が存在する。すなわち，$A+GC$ の発展定数が α 以下となる。またこのとき，

$$\|(sI-A-GC)^{-1}\|\leqq\frac{M_\alpha}{Re\ s-\alpha}\ \ (s\in C_\alpha)$$

となる。

(v) 可観測なシステム(2.6)は可検出である。

(vi) システム(2.6)が可検出であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I-A\\ C\end{bmatrix}=\dim X\ \ (\lambda\in\overline{C_0})$$

が成り立つことである。

ここで，行列Mに対して，rank M は行列Mの階数を意味する。■

3．有限次元補償器による外部安定化

システム作用素が自己共役であるような無限次元システムに対する本節の問題は，前報告[10]において議論された。本節では，もう少し広い無限次元システムのクラスに対しても，前報告[10]の結果が適用できることを示す。

無限次元システム(S)において状態空間Xを可分な Hilbert 空間とし，入力空間U及び出力空間Yをともに有限次元とする。またシステム(S)は次式のように記述されているとする。

$$(3.1)\qquad\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

ここで，入力作用素B及び出力作用素Cはともに連続，すなわち有界であり，システム作用素Aが生成する半群を $\{S(t);t\geqq 0\}$ とし，その発展定数を ω_0 とする。(3.1)式で表わされる無限次元システムに対して次の仮定を設ける。

(3.2) 仮定

(i) システム作用素が正規作用素である。

(ii) システム作用素がコンパクトレゾルベントをもち，生成される半群は解析的である。■

今，(3.1)式で記述されるシステム(S)の発展定数が負ならば，(S)が内部安定となり安定化する必要はない。従って，システムの安定化問題を考察するときには常にそのシステムの発展定数 ω_0 が非負であると仮定してよい。$\gamma\leqq 0(\leqq\omega_0)$ として定理(2.5, iii)を，システム作用素Aに対して適用すると，$X=X_\gamma\oplus X_\gamma^+(X_\gamma\neq\{0\})$ なる状態空間Xの分解が得られ，次の定理が導かれる。

(3.3) 定理

仮定(3.2)を満たす無限次元システム(S)が(3.1)式で記述されており，その発展定数 ω_0 が非負であるとする。任意の $\gamma\leqq 0$ に対して適当な部分空間 X_γ, X_γ^+ をとるとき，ともにA-不変部分空間となり，$0<\dim X_\gamma<\infty$, $X_\gamma\subset D(A)$, $X=X_\gamma\oplus X_\gamma^+$ となる。状態空間Xの分解 $X=X_\gamma\oplus X_\gamma^+$ によってシステム(S)は

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_\gamma(t)\\ x_\gamma^+(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_\gamma & 0\\ 0 & A_\gamma^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_\gamma(t)\\ x_\gamma^+(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_\gamma\\ B_\gamma^+\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=[C_\gamma\ \ C_\gamma^+]\begin{bmatrix}x_\gamma(t)\\ x_\gamma^+(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

のように表現できる。ここで，Π_γ をXから X_γ への X_γ^+ に沿った射影とするとき，$x_\gamma(t)=\Pi_\gamma x(t)$, $x_\gamma^+(t)=(I$

$-\Pi_\gamma)x(t)$, $B_\gamma=\Pi_\gamma B$, $B_\gamma^+=(I-\Pi_\gamma)B$ となり，$C_\gamma=C\Pi_\gamma$，$C_\gamma^+=C(I-\Pi_\gamma)$ となる。また，$\sigma(A_\gamma)=\sigma_\gamma=\{\lambda\in\sigma(A); Re\,\lambda\geqq\gamma\}\neq\phi$, $\sigma(A_\gamma^+)=\sigma(A)-\sigma_\gamma$ となる。

X_γ 上の有限次元システム $(C_\gamma, A_\gamma, B_\gamma)$ の発展定数は ω_0 であり，X_γ^+ 上の無限次元システム $(C_\gamma^+, A_\gamma^+, B_\gamma^+)$ は仮定(3.2)を満たし，システムの発展定数は γ 未満である。すなわち，システム $(C_\gamma^+, A_\gamma^+, B_\gamma^+)$ は安定となる。 ■

$\gamma=0$ として上の定理から得られる部分空間 X_0, X_0^+ をそれぞれ X_u, X_s と表わし，(S) の不安定部分空間，安定部分空間と呼ぶ。定理(3.3)より不安定部分空間 X_u は有限次元である。このとき A_0, B_0, C_0 をそれぞれ A_u, B_u, C_u と表わし，A_0^+, B_0^+, C_0^+ はそれぞれ A_s, B_s, C_s と表わされる。仮定(3.2)を満たすシステム (S) に対して，さらに次の仮定を設ける。

不安定部分空間上の有限次元システムは可制御かつ可観測である。 ■

仮定(3.2)，(3.4)を満たすシステム (S) に対して，結合システム (S_c, S) を外部安定とする有限次元補償器 (S_c) が存在することは，前報告と同様に示される。以下にその要点をまとめる。

任意の 2 正数 α_f, α_g を選んで固定する。このとき仮定(3.4)と定理(2.10, i, iv)により次式を満たす線形作用素(行列) $F_u\in B(X_u; U)$, $G_u\in B(Y; X_u)$ が存在する。

(3.5, a) $$\|(sI-A_u-B_uF_u)^{-1}\|\leqq\frac{M_f}{Re\ s+\alpha_f}\quad (s\in\overline{C_0})$$

(3.5, b) $$\|(sI-A_u-G_uC_u)^{-1}\|\leqq\frac{M_g}{Re\ s+\alpha_g}\quad (s\in\overline{C_0})$$

このとき，次式を満たす負数 γ をとる。

(3.6) $$\gamma<-\frac{M_1(\alpha_f+M_2)}{\alpha_f\alpha_g}$$

ここで，$M_1=M_g\|F_u\|\|G_u\|\|B_s\|\|C_s\|$, $M_2=M_f\|F_u\|\|B_u\|$ である。(3.6)式を満たす負数 γ に対して定理(3.3)を適用すると，有限次元部分空間 X_γ とその上での有限次元システム $(C_\gamma, A_\gamma, B_\gamma)$ が得られる。

X_γ 上の有限次元システム $(C_\gamma, A_\gamma, B_\gamma)$ に対して定理(2.8)を $\delta=0$ として適用すると，$\sigma_0=\{\lambda\in\sigma(A_\gamma); Re\,\lambda\geqq 0\}$ に対応する有限次元部分空間は X_u となり，$\sigma(A_\gamma)-\sigma_0$ に対応する有限次元部分空間を X_1 とするとき，$X_\gamma=X_u\oplus X_1$。さらに，この分解によって A_γ, B_γ, C_γ は

$$A_\gamma=\begin{bmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},\ B_\gamma=\begin{bmatrix} B_u \\ B_1 \end{bmatrix},\ C_\gamma=[C_u\ \ C_1]$$

のように表現される。この状態空間の分解 $X_\gamma=X_u\oplus X_1$ に従って

$$F_\gamma:=[F_u\ 0],\quad G_\gamma:=\begin{bmatrix} G_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表わされる線形作用素（行列）F_γ, G_γ をとり，$X_\gamma=X_u\oplus X_1$ 上の次のようなシステム $(S_{c\gamma})$ を構成する。

(3.7) $$\begin{cases} \dot z(t)=(A_\gamma+B_\gamma F_\gamma+G_\gamma C_\gamma)z(t)+G_\gamma u_0(t) \\ y_0(t)=F_\gamma z(t) \end{cases}$$

このとき，この有限次元システム $(S_{c\gamma})$ が結合システム $(S_{c\gamma}, S)$ を外部安定にする有限次元補償器となる。すなわち，次の定理が得られる。

(3.8) 定理

(3.1)式で記述される無限次元システム (S) が仮定(3.2)，(3.4)を満たすとする。このとき任意の正数 α_f, α_g に対して，(3.5)式を満たす M_f, M_g, F_u, G_u, さらに(3.6)式を満たす負数 γ を選び，(3.7)式によって有限次元補償器 $(S_{c\gamma})$ を構成するならば，結合システム $(S_{c\gamma}, S)$ は外部安定となる。また $(S_{c\gamma})$ の次元は dim X_γ。すなわち，

$$\sum_{\lambda\in\sigma_\gamma}\dim E(\lambda)X$$

となる。 ■

前報告[10]の中では，線形作用素 A_2（本報告では，A_γ^+）が自己共役作用素となることより，前報告[10]の(5.7)式

$$\|R(s;A_\gamma)\|\leqq\frac{1}{Re\,s-\gamma}\ (s\in \boldsymbol{C}_\gamma)$$

（注意：本報告では γ を $-\gamma$ と書き換えてある）を用いて，上の定理(3.8)を証明している。しかし，本報告の設定（システム作用素は正規作用素）においても，A_γ^+ は正規作用素となり，定理(2.4)を用いるならば，同じ評価式

$$\|R(s;A_\gamma^+)\|\leqq\frac{1}{Re\,s-\gamma}\quad (s\in \boldsymbol{C}_\gamma)$$

が得られる。故に，本報告の仮定の下でも，前報告[10]の証明をほとんど変えることなく，定理(3.8)が成り立つことがわかる。

4．有限次元補償器による内部安定化

前節では，不安定な無限次元システムを外部安定化する有限次元補償器の存在について考察した。本節で

は，前節において構成された外部安定化補償器が，結合システムの内部安定化をも達成していることを示す。そのために，Jacobson & Nett[7]の結合可安定/可検出性の概念を導入する。

(2.6)式の形に表現されるシステム

(4.1) $$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$$

を考える。入力空間U，出力空間Yはともに有限次元とするが，状態空間Xは必ずしも有限次元とは限らない。このとき次の定義をする。

(4.2) 定義[7]

システム(4.1)が結合可安定/可検出であるとは，$A+BF$, $A+GC$ のそれぞれの発展定数が負となるような線形作用素 $F\in B(X;U)$, $G\in B(Y;X)$ が存在することである。 ■

システム(4.1)が有限次元システムである時は，システムが結合可安定/可検出であることと，システムが可安定かつ可検出であることとは同値である。また一般の無限次元も含めたシステムに対して，次の定理が証明されている。

(4.3) 定理[7]

システム(4.1)が結合可安定/可検出であるための必要十分条件は以下の通りである。X_+ が有限次元となるXの分解 $X_+\oplus X_-$ が存在して，システムが $X=X_+\oplus X_-$ 上で

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_+(t)\\ x_-(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_+(t)\\ x_-(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_+\\ B_-\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=[C_+\ \ C_-]\begin{bmatrix}x_+(t)\\ x_-(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

の形に表現され，$\sigma(A_+)=\sigma(A)\cap\overline{C_0}$ となる。さらに (C_+, A_+, B_+) は結合可安定/可検出であり，(C_-, A_-, B_-) は X_- 上の安定なシステムである。 ■

(4.1)式のような表現をもつ2つのシステムを連結して得られる結合システムの安定性に関して，次の定理が成り立つ。

(4.4) 定理[7]

(4.1)式のような表現をもつ2つのシステム(S_0), (S_1)の結合システム(S_0, S_1)が内部安定であるための必要十分条件は，次の(i), (ii)が成り立つことである。

(i) 結合システム(S_0, S_1)が外部安定である。

(ii) (S_0), (S_1)がともに結合可安定/可検出である。

■

以上の準備の下に，次の定理が証明される。

(4.5) 定理

(3.1)式で記述される無限次元システム(S)が仮定(3.2), (3.4)を満たすとする。任意の正数 α_f, α_g に対して，(3.5)式を満たす M_f, M_g, F_u, G_u, さらに(3.6)式を満たす負数 γ を選び，(3.7)式によって有限次元補償器$(S_{c\gamma})$を構成するならば，結合システム$(S_{c\gamma}, S)$は内部安定となる。また$(S_{c\gamma})$の次元は $\dim X_\gamma$，すなわち，

$$\sum_{\lambda\in\sigma_\gamma}\dim E(\lambda)X$$

となる。

(証明)

仮定(3.2), (3.4)を満たす無限次元システム(S)に対して，2正数 α_f, α_g をとり，M_f, M_g, F_u, G_u, γ を(3.5), (3.6)を満たすように選び，(3.7)式によって有限次元補償器$(S_{c\gamma})$を構成する。このとき，定理(3.8)より結合システム$(S_{c\gamma}, S)$は外部安定となる。従って定理(4.4)より，この結合システムが内部安定となることを示すためには，両システム$(S_{c\gamma})$, (S)がともに結合可安定/可検出であることを示せばよい。

まず，無限次元システム(S)が結合可安定/可検出であることを示す。定理(3.3)を $\gamma=0$ として(S)に適用すると，状態空間Xは $X_u\oplus X_s$ のように分解され，X_u は有限次元となる。また，この状態空間の分解 $X=X_u\oplus X_s$ によってシステム(S)は

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_u(t)\\ x_s(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_u & 0\\ 0 & A_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_u(t)\\ x_s(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_u\\ B_s\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=[C_u\ \ C_s]\begin{bmatrix}x_u(t)\\ x_s(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

のように表現できる。このとき $\sigma(A_u)=\sigma(A)\cap\overline{C_0}$ となる。また X_s 上の無限次元システム(C_s, A_s, B_s)の発展定数は負となるので，このシステムは安定である。さらに仮定(3.4)より，X_u 上の有限次元システム(C_u, A_u, B_u)が可制御かつ可観測なので定理(2.10, ii. v)より X_u 上のシステム(C_u, A_u, B_u)は可安定かつ可検出，すなわち結合可安定/可検出である。従って定理(4.3)より，無限次元システム(S)は結合可安定/可検出である。

次に，有限次元補償器$(S_{c\gamma})$が結合可安定/可検出となることを示す。すなわち$(S_{c\gamma})$が可安定かつ可検出となることを示す。そのために定理(2.10, iii, vi)を用いる。任意の $\lambda\in\overline{C_0}$ に対して，

$$\mathrm{rank}[\lambda I - A_\gamma - B_\gamma F_\gamma - G_\gamma C_\gamma \quad G_\gamma]$$
$$= \mathrm{rank}[\lambda I - A_\gamma - B_\gamma F_\gamma \quad G_\gamma]$$
$$\geqq \mathrm{rank}[\lambda I - A_\gamma - B_\gamma F_\gamma]$$

同様に

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A_\gamma - B_\gamma F_\gamma - G_\gamma C_\gamma \\ F_\gamma \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A_\gamma - G_\gamma C_\gamma \\ F_\gamma \end{bmatrix}$$
$$\geqq \mathrm{rank}[\lambda I - A_\gamma - G_\gamma C_\gamma]$$

が得られる。ここで F_γ, G_γ のとり方により，$A_\gamma + B_\gamma F_\gamma$, $A_\gamma + G_\gamma C_\gamma$ はともに $\overline{C_0}$ 上に固有値を持たないので

$$\mathrm{rank}[\lambda I - A_\gamma - B_\gamma F_\gamma] = \mathrm{rank}[\lambda I - A_\gamma - G_\gamma C_\gamma] = \dim X_\gamma$$

となり定理(2.10, iii. vi)を用いると，X_γ 上のシステム $(S_{c\gamma})$ が可安定かつ可検出，すなわち結合可安定/可検出となる。このようにして定理が証明される。 ■

5．おわりに

前報告[10]では，結合システムの外部安定化を保証する有限次元補償器の存在とその構成法について考察した。今回は，[10]の結果がより広いシステムのクラスに拡張され，さらに，外部安定化補償器が結合システムの内部安定化をも保証することを示した。

本報告及び[10]の考察において，安定化補償器の次元は本質的に，フィードバックゲイン F_u, G_u の選び方に依存していることが容易にわかる。従って F_u, G_u の取り方によっては安定化補償器の低次元化も可能であろう。このことは今後の課題の一つである。またさらに，結合システムの発展定数を指定したとき，それを満たす最小次元の安定化補償器の構成もまた，今後に残された問題であろう。

前回及び今回とも，入力作用素・出力作用素がともに有界なシステムに対する考察であったが，今後は非有界な入力または出力作用素を持つシステムに対しても考察していきたい。

最後に本研究に対して有益なご討論と適切なご助言を戴いた東京電機大学稲葉博先生，大塚尚久先生に厚くお礼を申し上げます。

参考文献

[1] Triggiani, R.; On the Stabilizability Problem in Banach Space. J. Math. Anal. Appl., vol. 52, pp. 383-403 (1975)

[2] Curtain, R.F.; Finite Dimensional Compensators for Parabolic Distributed Systems with Unbounded Control and Observation. SIAM J. Cont. Optim., Vol. 22, pp. 255-276 (1984)

[3] Sakawa, Y; Feedback Stabilization of Linear Diffusion Systems. SIAM J. Cont. Optim., Vol. 21, pp. 667-676 (1983)

[4] Sakawa. Y.; Feedback Control of Second Order Evolution Equations with Damping. SIAM J. Cont. Optim., Vol. 22, pp. 343-361 (1984)

[5] Schumacher, J.M.; A Direct Approach to Compensator Design for Distributed Parameter Systems. SIAM J. Cont. Optim., Vol. 21, pp. 823-836 (1983)

[6] Curtain, R.F. and Salamon, D.; Finite Dimensional Compensators for Infinite Dimensional Systems with Unbounded Input Operators. SIAM J. Cont. Optim., Vol. 24, pp. 797-816 (1986)

[7] Jacobson, C.A. and Nett, C.N.; Linear State-Space Systems in Infinite-Dimensional Space: The Role and Characterization of Joint Stabilizability/Detectability. IEEE Trans. Auto. Cont., vol. 33, pp. 541-549 (1988)

[8] 示村悦二郎，内田健康，児島晃；むだ時間を含む系に対する有限次元補償器の設計。計測自動制御学会論文集，vol. 25, pp. 818-820 (1989)

[9] 日當明男；無限次元システムの安定化制御について。第12回 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集，pp. 185-188 (1989)

[10] 日當明男；無限次元システムの有限次元補償器による入出力安定化。長崎総合科学大学紀要，vol. 31, pp. 1-18 (1990)

[11] 坂和愛幸；線形システム制御論。朝倉書店 (1979)

[12] 計測自動制御学会編；自動制御ハンドブック基礎編。オーム社 (1983)

[13] Kato, T.; Perturbation Theory for Linear Operators. Springer (1984)

[14] Pazy, A.; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer (1983)