長崎総合科学大学紀要第31巻第1号

無限次元システムの有限次元補償器による入出力安定化

日　當　明　男*

On the Input-Output Stabilizability Problem of Infinite Dimensional Linear Systems by Finite Dimensional Compensators

Haruo HINATA

Abstract

Since Triggiani[1] in 1975, the stabilizability problem of infinite dimensional linear systems by finite dimensional compensators has been studied by many researchers. In 1983, Schumacher[6] showed the existence of internally stabilizing finite dimensional compensators for unstable infinite dimensional systems with bounded control and observation operators. Curtain and Salamon[7] extended his theory to a class of unstable systems with unbounded control operator. In [6] and [7], they did not give the details of the design algorithm and the dimension of the stabilizing compensators. In this report, we construct an input-output stabilizing compensator with finite dimension for a class of unstable infinite dimensional systems satisfying several conditions. Simultaneously, we discuss the design algorithm and the dimension of the stabilizing compensator.

1．はじめに

本報告では次式の形に表現されるシステムを扱う。

$$(1.1)\quad \begin{cases} \dot{x}(t)=A_1x(t)+B_1u_1(t) \\ y_1(t)=C_1x(t) \end{cases}$$

ここで，X，Y，Uを線形空間とし，$x(t)\in X$, $u_1(t)\in U$, $y_1(t)\in Y$とする。また，U，Yは有限次元とする。線形空間Xが有限次元空間のときシステム(1．1)は有限次元システム，無限次元空間のとき無限次元システムと呼ばれる。無限次元システムには，熱伝導方程式や波動方程式などの偏微分方程式で記述されるシステムや，むだ時間（遅れ）を持つシステムなどが含まれる。

有限次元および無限次元システムの安定性には，内部安定性と入出力安定性の２つの概念があり（定義(３．３)），これらはA_1の固定値またはスペクトルと密接な関係にある。有限次元システムにおいて，伝達関数の極は入出力安定性を表わし，極零相殺がなければ，内部安定性と入出力安定性は同値である。

今，システム(1．1)を安定でない（不安定）とする。このとき，別のシステム（静的システムも含む）を結合させることによって，全体としてシステムを安定にすることを，システム(1．1)に対する安定化問題といい，安定化を達成させるシステムを，安定化補償器と呼ぶ。本報告では，次のような安定化問題を考える。

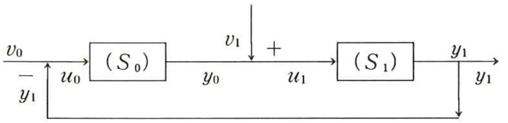
(1．1)式で記述されるような不安定なシステム(S_1)に対して，次のような補償器(S_0)を構成する。

---

*情報・制御工学コース助手
1990年５月30日受付

(1.2)　$\begin{cases} \dot{z}(t)=A_0z(t)+B_0u_0(t) \\ y_0(t)=C_0z(t) \end{cases}$

このとき，$v_0(t)$, $v_1(t)$ を外部入力として，$u_1(t)=v_1(t)+y_0(t)$, $u_0(t)=v_0(t)-y_1(t)$ のようにシステム (S_0) と (S_1) を結合すると，下図のような結合システムが得られる。



ここで，$v_1(t), y_0(t)\in U$, $u_0(t), v_0(t)\in Y$ であり，$z(t)\in Z$ とする。入力 (v_0, v_1)，出力 (y_0, y_1) をもつ上図のような結合システムは，(S_0, S_1) と表わされ，状態を $(x, z)\in X\times Z$ とすると，この入出力対に対して，

$$(1.3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & B_1C_0 \\ -B_0C_1 & A_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & C_0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

のように表現される。補償器 (S_0) は結合システム (S_0, S_1) を内部安定とするとき内部安定化補償器，入出力安定とするとき入出力安定化補償器と呼ばれる。本報告の目標は，不安定な無限次元システム (S_1) に対して，有限次元の入出力安定化補償器 (S_0) を構成することである。

このような有限次元安定化補償器の存在および構成に関する問題に対して，これまで多くの研究成果が報告されている[1]-[9]。特に，Schumacher [6]は，(1.1)式において B_1, C_1 が連続となるようなシステムに対して考察し，ある条件の下で，有限次元内部安定化補償器が存在することを証明した。さらに，むだ時間システムの一例に対して，安定化補償器を構成した。彼の考え方は，Curtain & Salamon [7]によって，B_1 が非連続なシステム，たとえば，境界入力を持つシステムのクラスまで拡張された。しかし彼らは，それぞれの論文の中で，安定化補償器の設計アルゴリズムやその次元について詳しく述べていない。むだ時間システムのあるクラスに対しては，示村他 [8] が Schumacher の考え方にしたがって有限次元安定化補償器の設計アルゴリズムを提案している。しかしより一般的なシステムに対する議論はまだ少なく，今後の研究に期待される所である。そこで本報告は，不安定な無限次元システムに対する有限次元入出力安定化補償器の次元も含めて，その設計アルゴリズムについて考察する。ここで得られる補償器は，安定化を保証する唯一のものではない。さらに，その次元も最小とは限らないことに注意すべきである。

第2節では，本報告中の議論の中で必要となる数学的な事項をまとめてある。第3節では，不安定な無限次元システムに対して，無限次元内部安定化補償器を構成する。これを参考にして，有限次元入出力安定化補償器を第4節において構成する。第5節では一つの例を示し，第6節には，結論と今後の課題をまとめる。

2．数学的な準備

Xを実数体（または複素数体）K上の線形空間とし，Y，ZをXの（線形）部分空間とする。このとき，$Y\cap Z$，$Y+Z=\{y+z; y\in Y, z\in Z\}$ もまたXの部分空間となる。$Y\cap Z=\{0\}$ のとき，$Y+Z$ は $Y\oplus Z$ と表わされ，$x\in Y\oplus Z$ の表現 $x=y+z\,(y\in Y, z\in Z)$ は一意である。$X=Y\oplus Z$ となるとき，$Y\oplus Z$ をXの分解と呼ぶ。VをXの部分集合とするとき，Vによって張られるXの部分空間を，$L(V)$ と表わすとき，$Y+Z=L(Y\cup Z)$ となる。$x_1, x_2, \cdots, x_n\in X$ に対して，$L(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ は特に，$\mathrm{span}\,\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と表わされる。部分空間Yに対して，（一次）独立な点の組 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}\subset X$，すなわち，各 i に対して，

$$\mathrm{span}\,\{x_i\}\cap \mathrm{span}\,\{x_1,\cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n\}=\{0\}$$

が存在して，$Y=\mathrm{span}\,\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ となるときYは有限次元であると言われ，Yの次元 $\dim Y$ は n となる。また $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ はYの基底と呼ばれる。有限次元でない線形空間は無限次元であると言われる。

Xを必ずしも有限次元でない線形空間とする。$\langle\cdot,\cdot\rangle$（または，$\langle\cdot,\cdot\rangle_X$）を$X$上の内積とする。すなわち，

(2.1, i)　$\langle x, y\rangle=\overline{\langle y, x\rangle}$

(2.1, ii)　$\langle x+y, z\rangle=\langle x, y\rangle+\langle y, z\rangle$

(2.1, iii)　$\langle \alpha x, y\rangle=\alpha\langle x, y\rangle$

(2.1, iv)　$\langle x, x\rangle\geq 0, \langle x, x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$

ここで，$x, y, z\in X$, $\alpha\in K$, $\overline{}$ は共役複素数を表わす。このX上の内積に対して，X上の関数 $\|\cdot\|$（または $\|\cdot\|_X$）を次のように定義する。

(2.2)　$\|x\|:=\sqrt{\langle x, x\rangle}$　　$x\in X$

このとき，$\|\cdot\|$ はX上のノルムとなる。すなわち，

(2.3, i)　$\|x\|\geq 0, \|x\|=0\Leftrightarrow x=0$　$(x\in X)$

(2.3, ii)　$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$　$(\alpha\in K, x\in X)$

(2.3, iii)　$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$　$(x, y \in X)$

を満たす。内積が定義された線形空間が(2.2)式で与えられるノルムによって完備，すなわち

$$\{x_n\} \subset X, \| x_n - x_m \| \to 0 \ (n, m \to \infty)$$
$$\Rightarrow \exists x \in X; \| x_n - x \| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となるとき，その線形空間はHilbert空間と呼ばれる。有限次元空間はすべてHilbert空間であり，それぞれ適当な整数nをとるとき$\boldsymbol{R}^n$と同型となる。また単に，(2.3)式を満たすノルムに関して完備な線形空間はBanach空間と呼ばれる。従って，Hilbert空間はBanach空間でもある。無限次元のBanach空間Xにおいて，Xの点列$\{x_1, x_2, \cdots\}$が次を満たすとき，$\{x_1, x_2, \cdots\}$はXの基底と呼ばれる。

・任意の自然数nに対して，$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$が独立

・$X = \overline{\mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots\}} = \overline{L(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})}$

ここで，集合Vに対して，$\bar{V}$はVの閉包を意味する。また，Banach空間Xにおいて，可算（または可付番）部分集合$X_0 = \{x_1, x_2, \cdots\}$が$X$で稠密である，すなわち，$\overline{X_0} \supset X$，従って，$\overline{X_0} = X$であるとき，$X$は可分であるという。第5節の例にあるような可算集合が基底となる線形空間が，今後重要となる。

XとYをK上のHilbert空間とし，それぞれのノルム，内積を$\| \cdot \|_X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X$と$\| \cdot \|_Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y$とする。$X$内で定義され，$Y$に値をもつ写像$T$を線形作用素とする。すなわち，

(2.4, a)　$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in D(T)$,

(2.4, b)　$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$
　　$(\alpha_1, \alpha_2 \in K, x_1, x_2 \in D(T))$

ここで，$D(T)$は写像Tの定義域を表わす。(2.4, a)式より線形作用素の定義域は常に部分空間となる。また，線形作用素Tの値域$\{Tx \in Y, x \in D(T)\}$は$R(T)$と表わされる。$V \subset D(T)$に対して，$TV := \{Tv \in Y; v \in V\}$とおくと，$TV$は部分空間となり，値域$R(T)$は，$TD(T)$とも表わせる。

$D(T) \subset X$上で定義されYに値をとる線形作用素Tを$T : (D(T) \subset X) \to Y$と表わし，$D(T) = X$のときは，$T : X \to Y$と略す。$X$上の線形作用素$T : X \to Y$が有界であるとは，

$$M := \sup_{\|x\|_X = 1} \| Tx \|_Y < \infty$$

となることである。このとき，Mは線形作用素Tの（作用素）ノルムと呼ばれ，$\| T \|$と表わされる。$T : X \to Y$が有界であることと連続であることは同値である。

XからYへの有界線形作用素の全体を$B(X; Y)$と表わすとき，$B(X; Y)$は作用素ノルムによってBanach空間となる。$B(X; X)$を$B(X)$と略す。Iは恒等作用素を表わす。

線形作用素$T : X \to Y$がコンパクト作用素であるとは，任意の有界点列$\{x_n\} \subset X$に対して，$\{Tx_n\} \subset Y$が収束する部分列をもつことである。コンパクト作用素は完全連続作用素とも呼ばれる。線形作用素$T : (D(T) \subset X) \to Y$が閉作用素であるとは，$\{x_n\} \subset D(T)$が，$x_n \to x \in X$, $Tx_n \to y \in Y$ $(n \to \infty)$を満たすときに，$x \in D(T)$, $Tx = y$となることである。これらの作用素に関して，次の定理が成り立つ。

(2.5)定理 [10, p.29, pp.40-42] [11, p.123]

(i)　$T \in B(X)$が，$\| T \| < 1$を満たすならば，
$(I-T)^{-1}$が存在し，$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in B(X)$

(ii)　コンパクト作用素はすべて有界であり，その値域は可分である。

(iii)　有界線形作用素は閉作用素である。

(iv)　閉作用素Tの逆作用素T^{-1}が存在すれば，T^{-1}もまた閉作用素となる。

(v)　$T : (D(T) \subset X) \to Y$を閉作用素，$\alpha \in K, S \in B(X; Y)$とすると，$\alpha T, T+S$もまた閉作用素となる。

(vi)　$T : (D(T) \subset X) \to Y$を閉作用素とする。$D(T) = X$ならば$T \in B(X; Y)$である。■

$T : (D(T) \subset X) \to Y$を閉作用素とし，$D(T)$が$X$で稠密であるとする。$y \in Y$に対して，

$$\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, z \rangle_X \qquad (x \in D(T))$$

なる$z \in X$が存在するとき，$y \in D(T^*)$, $T^* y = z$として，作用素$T^* : (D(T^*) \subset Y) \to X$を定義する。この作用素は，$T$の共役作用素と呼ばれ，閉線形作用素となる。さらに，$D(T^*)$はYで稠密となり，$(T^*)^* = T^{**} = T$となる。$T \in B(X; Y)$の共役作用素T^*は有界となり，$\| T \| = \| T^* \|$となる。$X = Y$において，$T = T^*$，すなわち，$D(T) = D(T^*)$, $Tx = T^* x$, $(x \in D(T))$となるとき，Tは自己共役作用素と呼ばれる。また，$TT^* = T^* T$のとき，閉作用素Tは正規作用素と呼ばれる。自己共役作用素は正規作用素である。

$T : (D(T) \subset X) \to Y$を線形作用素，$Z$を$X$の部分空間とする。このとき，

$$T_Z x := Tx \quad (x \in D(T) \cap Z)$$

のように定義される線形作用素 T_Z は T の Z への制限と呼ばれ，$T|_Z$ と表わされる。X が $X_1 \oplus X_2$ のように分解されているとき，

$$T=[T|_{X_1} \quad T|_{X_2}]$$

は，分解 $X=X_1 \oplus X_2$ による作用素 T の表現と呼ばれる。また，$T:(D(T)\subset X)\to X$ に対して，部分空間 Z が

$$T(Z\cap D(T))\subset Z$$

を満たすとき，Z は T-不変部分空間と呼ばれる。このとき分解 $X=X_1 \oplus X_2$ に対して，作用素 T は

$$T=\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}$$

なる表現をもつ。ここで，$T_1:(D(T_1)\subset X_1)\to X_1$, $T_2:(D(T_2)\subset X_2)\to X_1$, $T_3:(D(T_3)\subset X_1)\to X_2$, $T_4:(D(T_4)\subset X_2)\to X_2$. このとき，

$$T|_{X_1}=\begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \end{bmatrix} \qquad T|_{X_2}=\begin{bmatrix} T_2 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

X_1, X_2 はそれぞれ T_1-，T_4-不変部分空間である。

線形作用素 $A:(D(A)\subset X)\to X$ を Hilbert 空間 X 内で稠密に定義された閉作用素とする。複素数 λ に対して，$\lambda I-A$ の逆作用素が有界となるとき，$R(\lambda : A)=(\lambda I-A)^{-1}$ を閉作用素 A の $\lambda\in\boldsymbol{C}$ におけるレゾルベントと呼び，それが存在するような $\lambda\in\boldsymbol{C}$ の全体を $\rho(A)$ と表わして，レゾルベント集合と呼ぶ。このとき $\rho(A)$ は開集合となり，各 $\lambda\in\rho(A)$ において，

$$R(\mu; A)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^n R(\lambda; A)^{n+1}$$

$$\left(\mu : |\lambda-\mu|<\frac{1}{\|R(\lambda; A)\|}\right)$$

となる[12, p.163]。すなわち，$R(\lambda; A)$ は $\rho(A)$ 上で正則（解析的）である。一般的に，$D\subset\boldsymbol{C}$ を開集合とするとき $T(\cdot):D\to B(X)$ が D 上で正則（解析的）であるとは任意の $s_0\in D$ において，

$$T(s)x=\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_0)^n T_n x \quad (x\in X, s\in U(x_0))$$

となる s_0 の近傍 $U(x_0)$ と $T_n\in B(X)$ $(n=0,1,\cdots)$ が存在することである。また，$A\in B(X)$ のとき，$\{\lambda\in\boldsymbol{C}; |\lambda|>\|A\|\}\subset\rho(A)$ であり，

$$R(\lambda; A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}A^n \quad (\lambda : |\lambda|>\|A\|)$$

となる［10，p.98］。

$\sigma(A)=\rho(A)^c=\boldsymbol{C}-\rho(A)$ を A のスペクトルと呼ぶ。$\lambda\in\sigma(A)$ はすべて $R(\cdot\,; A)$ の特異点となる。$Ker(\lambda I-A):=\{x\in X; (\lambda I-A)x=0\}\neq\{0\}$ となる $\lambda\in\sigma(A)$ は特に A の固有値と呼ばれ，その全体は $\sigma_p(A)$ と表わされる。$\sigma(A)$ の孤立点 $\lambda\in\sigma_p(A)$ に対して，次のような作用素を定義する。

（2．6）　$$E(\lambda)x:=\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}(\lambda I-A)^{-1}x\,d\lambda$$

$$(x\in X, j=\sqrt{-1})$$

ここで，Γ は $\rho(A)$ 内の $\lambda\in\sigma_p(A)$ を囲む充分小さな円である。この作用素は有界かつ線形となり，固有値 λ に対応する固有射影作用素と呼ばれる。射影作用素の値域 $E(\lambda)X$ は $D(A)$ に含まれ，固有値 λ に対応する（一般化）固有空間と呼ばれる。$E(\lambda)X$ の各元は λ に対応する（一般化）固有関数（またはベクトル）と呼ばれる。今，$\lambda\in\sigma_p(A)$ が $R(\cdot\,; A)$ の有限位数の孤立特異点，すなわち極とすると，固有空間 $E(\lambda)X$ は次式を満たし，その次元は有限となる［12，p.175］。

$$E(\lambda)X=\bigcup_{n=1}^{\infty}Ker(\lambda I-A)^n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X; (\lambda I-A)^n x=0\}$$

固有空間 $E(\lambda)X$ の次元は固有値 λ の（代数的）重複度と呼ばれる。次の定理は重要である。

（2．7）　定理［12，p.187］［16，pp.177-273］

$A:(D(A)\subset X)\to X$ を稠密に定義された閉作用素，$T\in B(X)$ とする。このとき次の(i)—(viii)が成り立つ。

(i)　$\lambda_0\in\rho(A)$ に対して $R(\lambda_0; A)$ がコンパクト作用素ならば，任意の $\lambda\in\rho(A)$ に対して $R(\lambda; A)$ もコンパクト作用素となる。

(ii)　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\in\sigma_p(A)$ を $\sigma(A)$ の孤立点とし，互いに異なるとする。このとき，

$$\Pi:=E(\lambda_1)+E(\lambda_2)+\cdots+E(\lambda_n)$$

と定義し，$X_1:=\Pi X$, $X_2:=(I-\Pi)X$ とすると，X_1, X_2 はともに A-不変部分空間となり，$X_1=E(\lambda_1)X\oplus E(\lambda_2)X\oplus\cdots\oplus E(\lambda_n)X\subset D(A)$, $X=X_1\oplus X_2$ となる。さらに，$A|_{X_1}\in B(X_1)$, $\sigma(A|_{X_1})=\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, $A|_{X_2}$ は X_2 で稠密に定義された閉作用素となり，$\sigma(A|_{X_2})=\sigma(A)-\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. 分解 $X=X_1\oplus X_2$ に対して作用素 A は，

$$A=\begin{bmatrix} A|_{X_1} & 0 \\ 0 & A|_{X_2} \end{bmatrix}$$

のように表現される。

(iii)　A を自己共役作用素とする。このとき，$\sigma(A)\subset\boldsymbol{R}$. 従って，固有値はすべて実数である。また A のレゾルベントは正規作用素となる。さらに各固有値 $\lambda\in\sigma_p(A)$ に対する固有射影作用素もまた自己共役作用素となる。

(iv)　T をコンパクト作用素とする。このとき，$\lambda(\neq 0)$

$\notin \rho(T)$ ならば $\lambda \in \sigma_p(T)$. また $\sigma_p(T)$ の元はすべてレゾルベント $R(\cdot; T)$ の極となり，$\sigma_p(T)$ は 0 以外に集積点を持たない。さらに $\lambda(\neq 0) \in \sigma_p(T)$ に対応する固有空間は有限次元である。

(v) T がコンパクトな正規作用素であるとき，

$$\| T \| = \sup\{ |\lambda| ; \lambda \in \sigma_p(T)\}$$

(vi) $s \in \rho(A)$ に対して，

$$\mu \in \sigma_p(R(s; A)) \Leftrightarrow s - \frac{1}{\mu} \in \sigma_p(A)$$

(vii) A がコンパクトレゾルベントをもつとき，$\sigma(A)$ は固有値のみからなり，無限遠点以外に集積点を持たない。

(viii) A が自己共役でコンパクトレゾルベントを持つとき，$s \in \rho(A)$ に対して，

$$\| R(s; A) \| \leq \frac{1}{d(s; \sigma_p(A))}$$

ここで，$d(s; \sigma_p(A)) := \inf\{ |s - \lambda| ; \lambda \in \sigma_p(A)\}$. ■

X，Y が有限次元のとき，線形作用素 $A:(D(A) \subset X) \to Y$ はすべて有界となる。すなわち $D(A) = X$ となる。このとき，X，Y にそれぞれ適当な基底をとることによって，作用素 A は行列として表現される。この意味で，有限次元空間においては，行列と作用素を区別せずに用いることもある。また有限次元空間上の線形作用素 A の $\sigma_p(A)$ は有限集合であり，$\sigma(A) = \sigma_p(A)$ となる。

非負の実数 t に対して，Hilbert 空間 X 上の線形作用素 $S(t) \in B(X)$ を対応させる作用素値関数 $S(\cdot): [0, \infty) \to B(X)$ が次の性質をもつとする。

- 任意の $x \in X$ に対して，$S(\cdot)x : [0, \infty) \to X$ が連続
- $S(0) = I$
- 任意の $t, s \geq 0$ に対して，$S(t+s) = S(t)S(s)$

このような作用素値関数 $S(\cdot)$ または $\{S(t); t \geq 0\}$ は (C_0-) 半群と呼ばれる。またこのような半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ に対して，次のような作用素が定義できる。

$$Ax := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(S(h)x - x) \quad (x \in D(A))$$

ここで，$D(A)$ は上式の右辺の極限値が存在するような $x \in X$ の全体である。上式によって定義される作用素 A は線形であり，半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ の生成作用素と呼ばれる。

半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ に対して，

(2.8) $$\omega_0 := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \| S(t) \|$$

とおくと，ω_0 は $-\infty$ かまたは有限値となり，$\omega > \omega_0$ なる任意の ω に対して，

(2.9) $$\| S(t) \| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad (t \geq 0)$$

を満たす $M_\omega \geq 1$ が存在する[10, p.163]。ω_0 は (2.9) 式を満たす ω の下限となり，半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ またはその生成作用素の発展定数と呼ばれる。次の定理は Hille-吉田の定理として良く知られている。

(2.10) 定理 [10, p.179]

X を Hilbert 空間，$\{S(t); t \geq 0\}$ を (2.9) を満たす X 上の半群とする。このとき線形作用素 $A:(D(A) \subset X) \to X$ が $\{S(t); t \geq 0\}$ の生成作用素であるための必要十分条件は

(i) $D(A)$ が X で稠密で，A が閉作用素である。

(ii) 適当な $\omega \in \boldsymbol{R}$, $M_\omega \geq 1$ に対して，

$$\{\lambda \in \boldsymbol{R}; \lambda > \omega\} \subset \rho(A) \text{ かつ}$$

$$\| R(\lambda; A)^n \| \leq \frac{M_\omega}{(\lambda - \omega)^n} \quad (\lambda : \lambda > \omega,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つことである。■

さらに次の定理が成り立つ。

(2.11) 定理 [10, pp.168-169] [17, p.106]

$\{S(t); t \geq 0\}$ を X 上の半群，A をその生成作用素，ω_0 を半群の発展定数とする。このとき，(i)-(iv)が成り立つ。

(i) $\boldsymbol{C}_{\omega_0} := \{\lambda \in \boldsymbol{C}; Re\,\lambda > \omega_0\} \subset \rho(A)$ かつ

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \quad (x \in X, \lambda \in \boldsymbol{C}_{\omega_0})$$

ここで，$Re\,\lambda$ は複素数 λ の実部を表わす。

(ii) $\omega > \omega_0$ なる ω に対して，$\boldsymbol{C}_\omega \subset \rho(A)$ となり，かつ

$$\| R(\lambda; A) \| \leq \frac{M}{Re\,\lambda - \omega} \quad (\lambda \in \boldsymbol{C}_\omega)$$

を満たす $M \geq 1$ が存在する。このとき，

$$\| S(t) \| \leq M e^{\omega t} \quad (t \geq 0)$$

(iii) A がコンパクトレゾルベントを持つならば，X は可分である。

(iv) 任意の正数 T をとる。$x_0 \in D(A)$,$[0, T]$ 上の X-値連続関数 $f(\cdot)$ に対する微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t) \quad (t \in (0, T)) \quad x(0) = x_0$$

は次式で表わされる一意解をもつ。

$$x(t)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-z)f(z)dz \quad (t\in[0,\ T])(1)$$

また，$x_0\in X, f(\cdot)\in L^1(0,\ T;\ X)$　すなわち

$$\int_0^T \|f(t)\|_X dt<\infty$$

なる $x_0, f(\cdot)$ に対して(1)式で与えられる関数 $x(\cdot)$ は $[0,\ T]$ 上の X-値連続関数となる。■

次の定理は非常に興味深い。

(2.12)　定理 [6, Lem. 3. 1]

X_1, X_2 を Hilbert 空間，$\{S_1(t);\ t\geq 0\}, \{S_2(t);\ t\geq 0\}$ をそれぞれ X_1, X_2 上の半群とし，それぞれの発展定数を ω_1, ω_2 とする。また，A_1, A_2 をそれぞれ $\{S_1(t);\ t\geq 0\}, \{S_2(t);\ t\geq 0\}$ の生成作用素，$B\in B(X_2;\ X_1)$, $C\in B(X_1;\ X_2)$ とするとき，$X=X_1\oplus X_2$ 内で定義される線形作用素 $\tilde{A}$, $\hat{A}$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{A}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{bmatrix}$$

はそれぞれ X 上の半群 $\{\tilde{S}(t);\ t\geq 0\}, \{\hat{S}(t);\ t\geq 0\}$ を生成し，それらの発展定数はともに $\max(\omega_1, \omega_2)$ である。■

X 上の半群 $\{S(t);\ t\geq 0\}$ が解析的であるとは，適当な $\delta\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ をとるとき，作用素値関数 $S(\cdot)$ が $B(X)$-値正則関数として角領域 $\{t\in \boldsymbol{C};\ t\neq 0, |\arg t|<\delta\}$ に拡張され，任意の $\varepsilon\in(0, \delta)$ に対して，

$$\lim_{\substack{t\in\Delta_\varepsilon \\ t\to 0}} S(t)x=x \quad (x\in X)$$

が成り立つことである。ここで，$\Delta_\varepsilon:=\{t\in \boldsymbol{C};\ |\arg t|<\delta-\varepsilon\}$, $\arg t$ は複素数 $t(\neq 0)$ の偏角を表わす。このとき，次の定理が成り立つ。

(2.13)　定理 [12, pp.294-301]

X 上の半群 $\{S(t);\ t\geq 0\}$ が解析的半群であるための必要十分条件は，半群の生成作用素 A が次を満たすことである。

適当な $a\in\boldsymbol{R}$ と $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ をとると，$\{\lambda\in \boldsymbol{C};\ |\arg(\lambda-a)|\geq\varphi\}\cup\{a\}\supset\sigma(A)$ となり，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leq\frac{M_\varepsilon}{|\lambda-a|} \ (\lambda\in \boldsymbol{C}:|\arg(\lambda-a)|\leq\varphi-\varepsilon)$$

を満たす。■

次の定理も成り立つ。

(2.14)　定理

$A:(D(A)\subset X)\to X$ が生成する X 上の半群 $\{S(t);\ t\geq 0\}$ が解析的であるとする。また A のレゾルベントがコンパクトであるとする。このとき次の(i), (ii)が成り立つ。

(i)　任意の $\omega\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\sigma(A)\cap\overline{C_\omega}=\{\lambda\in\sigma(A);\ Re\,\lambda\geq\omega\}$ は有限集合である。

(ii)　ω_0 を半群 $\{S(t);\ t\geq 0\}$ の発展定数とすると，

$$\omega_0=\sup\{Re\,\lambda;\ \lambda\in\sigma_P(A)\}$$

（証明）

(i)　半群 $\{S(t);\ t\geq 0\}$ が解析的なので，定理(2.13)より

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\in \boldsymbol{C};\ |\arg(\lambda-a)|\geq\varphi\}\cup\{a\}$$

となる $a\in R$ と $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ が存在する。故に，$\omega\geq a$ のとき，$\sigma(A)\cap\overline{C_\omega}=\phi$。$\omega<a$ のとき

$$\sigma(A)\cap\overline{C_\omega}=\{\lambda\in\sigma(A);\ Re\,\lambda\geq\omega\}$$
$$\subset(\{\lambda\in \boldsymbol{C};\ |\arg(\lambda-a)|\geq\varphi\}\cup\{a\})\cap\overline{C_\omega}$$

となり，$\sigma(A)\cap\overline{C_\omega}$ は有界集合となる。

一方，生成作用素 A がコンパクトレゾルベントをもつので，定理(2.7, iii)より $\sigma(A)$ は無限遠点以外に集積点を持たない。すなわち，有界集合の中には集積点が存在しない。従って，$\sigma(A)\cap\overline{C_\omega}$ は有限集合である。

(ii)　Triggiani[1, pp.387-388]と，$\sigma(A)=\sigma_P(A)$ による。■

X が有限次元のとき，定理(2.14)は常に成立し，ω_0 は(2.9)式を満たす ω の最小値となる。また有限次元空間 X に一つの基底をとると，X 上の半群 $\{S(t);\ t\geq 0\}$ およびその生成作用素 A はともに行列として表現され，

$$(2.15)\quad S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=e^{At} \quad (t\geq 0)$$

が成り立つ。X が無限次元のときでも，生成作用素 A が有界ならば上式(2.15)は成立する。

本節の最後に，$[0, \infty)$ 上のベクトル値関数のラプラス変換について述べる。X を Banach 空間とし，$f(\cdot)$: $[0, \infty)\to X$ をベクトル値関数とする。このとき，$s\in \boldsymbol{C}$ に対して

$$(2.16)\qquad F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

のようにベクトル値複素関数を定義する。ここで，$F(s)$は，右辺の積分が

$$\int_0^\infty \| e^{-st}f(t)\|_X dt<\infty$$

の意味で存在する $s\in \boldsymbol{C}$ において定義される。このとき(2.16)式によって定義される $F(s)$ を解析接続して得られるベクトル値複素関数を $\mathscr{L}(f)$ と表わして，f のラプラス変換と呼ぶ。定理(2.11, i)より，$R(s; A)$ は $T(\cdot)$ のラプラス変換とみることができる。このとき次の定理が成り立つ。

(2.17)　定理［18, p.163］

ベクトル値関数 $f(\cdot):[0,\infty)\to X$ に対して，$e^{\alpha\cdot}f(\cdot)\in L^2(0,\infty; X)$ すなわち，

$$\int_0^\infty \| e^{\alpha t}f(t)\|_X^2 dt<\infty$$

なる $\alpha\in R$ が存在するならば，$s\in \overline{\boldsymbol{C}_{-\alpha}}=\{s\in \boldsymbol{C}; Re\ s\geq -\alpha\}$ において $F(s)$ は有限な値を持ち，$s\in \boldsymbol{C}_{-\alpha}=\{s\in \boldsymbol{C}; Re\ s>-\alpha\}$ において正則となる。すなわち，f のラプラス変換 $\mathscr{L}(f)$ は $\boldsymbol{C}_{-\alpha}$ 上正則である。■

(2.18)　定理［19, pp.213-217］

作用素値関数 $T(\cdot):[0,\infty)\to B(X)$, ベクトル値関数 $g(\cdot):[0,\infty)\to X$ のラプラス変換をそれぞれ $R(s)$, $G(s)$ とする。すなわち，

$$R(s)x=\int_0^\infty e^{-st}T(t)xdt\quad (x\in X).$$

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt.$$

このとき，ベクトル値関数 $h(\cdot)$

$$h(t)=\int_0^t T(t-s)g(s)ds\quad (t\geq 0)$$

のラプラス変換は $R(s)G(s)$ となり，$R(s)$, $G(s)$ が共に正則な $s\in \boldsymbol{C}$ において正則となる。■

3．基本的な定義

Xを可分な Hilbert 空間，U，Yを有限次元空間とし，$\dim U=m$, $\dim Y=p$ とする。線形作用素 $A:(D(A)\subset X)\to X$ をX上の半群 $\{S(t); t\geq 0\}$ の生成作用素とし，$B\in B(U; X)$, $C\in B(X; Y)$ とする。ここでは(1.1)式のように表わされる次のシステムを考える。

(3.1, a)　$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\quad (t>0)\quad x(0)=x_0$

(3.1, b)　$y(t)=Cx(t)$

ここで，$x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $u(\cdot)$ はともに時間 t の関数であり，各 $t\geq 0$ において，$x(t)\in X$, $y(t)\in Y$, $u(t)=U$, $\dot{x}(\cdot)$ は $x(\cdot)$ の時間微分を表わす。また $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $u(\cdot)$ はそれぞれシステム(3.1)の状態関数，出力（または観測）関数，入力（または制御）関数と呼ばれ，X，Y，Uはそれぞれシステム(3.1)の状態空間，出力（または観測）空間，入力（または制御）空間と呼ばれる。またA，B，Cはシステム(3.1)のシステム作用素，入力（または制御）作用素，出力（または観測）作用素と呼ばれ，システム(3.1)はシステム(C, A, B)とも表わされる。システム(3.1)はその状態空間Xが無限次元のとき無限次元システム，有限次元のとき有限次元システムと呼ばれ，$\dim X$ を有限次元システム(3.1)の次元と呼ぶ。

(3.1, a)式の解，すなわちシステム(3.1)の状態 $x(\cdot)$ は定理(2.11, iv)より，$x_0\in D(A)$, $u(\cdot):[0,\infty)\to U$ が連続のとき，

(3.2, a)　$x(t)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-s)Bu(s)ds\quad (t\geq 0)$

と一意的に表わされる。またシステム(3.1)の出力 $y(\cdot)$ は(3.1, b)式と(3.2, a)式より，

(3.2, b)　$y(t)=CS(t)x_0+\int_0^t CS(t-s)Bu(s)ds\quad (t\geq 0)$

と表わせる。半群 $\{S(t); t\geq 0\}$ およびその発展定数はそれぞれシステム(3.1)の半群および発展定数と呼ばれる。ここで，システムの発展定数を ω_0 とする。

今，(3.2, b)式において，$x_0=0$ とし，両辺をラプラス変換すると定理(2.11, i)，(2.18)より

$$Y(s)=CR(s; A)BU(s)$$

を得る。ここで，$Y(s)$, $U(s)$ はそれぞれ $y(\cdot)$, $u(\cdot)$ のラプラス変換である。$W(s)=CR(s; A)B$ とおくと $W(s)$ は$B(U; Y)$に値をもつ $\rho(A)$ 上の正則関数となる。作用素値複素関数 $W(\cdot)$ はシステム(3.1)の伝達関数と呼ばれ，U，Yに適当な基底をとることによって (p, m) 行列として表現される。このとき，$u(\cdot)\in L^2(0,\infty; u)$ とすると定理(2.17)より，ラプラス変換 $U(s)$ は $\boldsymbol{C}_0=\{s\in \boldsymbol{C}, Re\ s>0\}$ 上で正則である。また，定理(2.11, i)より伝達関数 $W(\cdot)$ が $\boldsymbol{C}_{\omega_0}=\{s\in \boldsymbol{C}; Re\ s>\omega_0\}$ 上で正則となることも容易にわかる。従って，定理(2.18)より，$Y(\cdot)$ は $\boldsymbol{C}_{\omega_1}:=\{s\in \boldsymbol{C}: Re\ s>\omega_1:=\max(0,\omega_0)\}$ 上で正則となる。

一方，定理(2.11, ii)より，$\omega>\omega_1\geq 0$ なる ω に対して，

$$\| y(t)\| \leq \tilde{M}e^{\omega t}\left(\int_0^\infty \| u(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\quad (t\geq 0)$$

を満たす定数 $\tilde{M}$ が存在する。このときシステム(3.1)に対して次のような概念を導入する。

(3.3)　定義

(i)　システム(3.1)が内部安定（または単に安定）であるとは，

$$\| S(t) \| \leq Me^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

を満たす正数α，Mが存在することである。

(ii)　システム(3.1)が入出力安定（または外部安定）であるとは，

$$\| CS(t)B \| \leq Me^{-\alpha t} \quad (t \geq 0) \qquad (1)$$

を満たす正数 α，Mが存在することである。■

これらの安定性の概念について次の定理が成り立つ。

(3.4)　定理

(i)　システムが内部安定であることと，そのシステムの発展定数が負であることとは同値である。

(ii)　システムが非負の実部をもつ固有値を持つならば，そのシステムは不安定である。すなわち，内部安定ではない。

(iii)　内部安定なシステムはすべて入出力安定である。

(iv)　定義(3.2)の(1)式を満たすシステムの伝達関数 $W(\cdot)$ は $\boldsymbol{C}_{-\alpha}=\{s\in \boldsymbol{C}; Re\, s > -\alpha\}$ 上で正則である。

(証明)

(i)，(iii)は安定性の定義より明らかである。

(ii)　定理(2.11，i)より，次式が得られる。

$$\sigma(A)\subset \boldsymbol{C}_{\omega_0}{}^c=\{s\in \boldsymbol{C}; Re\, s\leq \omega_0\}$$

故に，発展定数 ω_0 は，$\omega_0\geq \sup\{Re\,\lambda; \lambda\in\sigma(A)\}$ を満たす。今，非負の実部をもつ固有値が存在するので，

$$\sup\{Re\,\lambda; \lambda\in\sigma(A)\}\geq 0$$

従って，発展定数が非負となり，(i)より(ii)がなりたつ。

(iv)　定理(2.17)より従う。■

ここで，有限次元システムについてまとめておく。前節で述べたように，有限次元空間X，U，Yに適当な基底をとると線形作用素A，B，Cはそれぞれ (n, n)，(n, m)，(p, m) 行列として表現される。ここでnはシステムの次元 $\dim X$ である。このとき(2.15)，(3.2)式より，有限次元システム(3.1)の状態 $x(t)$ および出力 $y(t)$ は

(3.5，a)　$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$

(3.5，b)　$y(t)=Ce^{At}x_0+\int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds$　$(t\geq 0)$

と表わせる。有限次元システムにおいても定義(3.3)の2つの安定性が定義できる。また次の2つの概念は重要である。

(3.6)　定義

(i)　任意の $x_0\in X$ に対して，$T>0$ と $[0, T]$ 上のU-値連続関数 $u(\cdot)$ を適当にとることによって，

$$e^{AT}x_0+\int_0^T e^{A(T-t)}Bu(t)dt=0$$

とできるとき，有限次元システム(3.1)は可制御であるという。

(ii)　$u(\cdot)\equiv 0$ に対する(3.5，b)式で与えられる出力の有限時間T内のデータ $\{y(t); 0\leq t\leq T\}$ から $t=0$ におけるシステムの状態 x_0 を一意に決定できるとき，有限次元システム(3.1)は可観測であるという。■

有限次元システムにおいて，次の2つの定理が成り立つ。

(3.7)　定理 [13，pp.50-53]

n次元システム(3.1)に対して，次の(i)，(ii)が成り立つ。

(i)　システム(3.1)が可制御であるための必要十分条件は次式が満たされることである。

$$\mathrm{rank}[B\ \ AB\ \ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]=n$$

(ii)　システム(3.1)が可観測であるための必要十分条件は次式が満たされることである。

$$\mathrm{rank}[C^*\ \ A^*C^*\ \ (A^*)^2C^*\ \cdots\ (A^*)^{n-1}C^*]=n$$

ここで，行列Mに対して，rank M は行列の階数を表わす。M^* は線形作用素Mの共役作用素であり，行列Mの共役転置行列である。■

(3.8)　定理 [13，p.88]

有限次元システム(3.1)に対して次の(i)，(ii)が成り立つ。

(i)　システム(3.1)が可制御ならば，任意の $\alpha>0$ に対して，次式を満たす線形作用素Fが存在する。

$$\sup\{Re\,\lambda; \lambda\in\sigma(A+BF)\}\leq -\alpha$$

これにより，有限次元システム $(C, A+BF, B)$ は内部安定となる。

(ii)　システム(3.1)が可観測ならば，任意の $\alpha>0$

に対して，次式を満たす線形作用素Gが成立する。

$$\sup\{Re\,\lambda\,;\,\lambda\in\sigma(A+GC)\}\leq-\alpha$$

これにより，有限次元システム$(C, A+GC, B)$は内部安定となる。■

無限次元システム(3．1)のシステム作用素Aに対して次の2つの仮定を設ける。

(3．9)　仮定

システム作用素は自己共役作用素である。■

(3．10)　仮定

システム作用素はコンパクトレゾルベントを持ち，生成する半群は解析的である。■

これら2つの仮定を満たすシステム(3．1)をシステム(S)と表わす。このシステムにおいて，定理(2．11, ii)より$\omega>\omega_0$なるωに対して，$\boldsymbol{C}_\omega\subset\rho(A)$, すなわち，

$$\sigma(A)\subset\boldsymbol{C}_\omega{}^c=\{s\in\boldsymbol{C}\,;\,Re\,s\leq\omega\}$$

となる。ここで，ω_0はシステムの発展定数である。また，$s\in\boldsymbol{C}_\omega$, $\lambda\in\sigma(A)$に対して

$$|s-\lambda|\geq|s-\omega|\geq Re\,s-\omega$$

が成り立つ。故に定理(2．7, viii)より

$$(3.11,\ \mathrm{a})\qquad \|R(s;A)\|\leq\frac{1}{Re\,s-\omega}\qquad (s\in\boldsymbol{C}_\omega)$$

従って，定理(2．10)より

$$(3.11,\ \mathrm{b})\qquad \|S(t)\|\leq e^{\omega t}\quad (t\geq0)$$

となる。

またシステム作用素Aのスペクトル$\sigma(A)$は無限個の固有値のみからなり，定理(2．7, iii, iv)より

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{\lambda_i\in\boldsymbol{R}\,;\,\lambda_i>\lambda_{i+1},\ i=1,2,\cdots\}$$

とおける。$\lambda_1\geq0$のとき，

$$\lambda_N\geq0>\lambda_{N+1}$$

なる自然数Nが存在する。定理(2．7, iii)より，各固有値λ_iに対応する固有射影作用素$E(\lambda_i)$は(2．6)式によって定義され，自己共役作用素となる。ここで

$$\Pi:=E(\lambda_1)+E(\lambda_2)+\cdots+E(\lambda_N)$$

のように有界線形作用素Πを定義すると，定理(2．7, ii)より，$X_u:=\Pi X\subset D(A)$, $X_s:=(I-\Pi)X$はともにA-不変部分空間となり，$X=X_u\oplus X_s$となる。また，X_u, X_sはともに$S(t)$-不変部分空間となる。すなわち，

$$S(t)X_u\subset X_u,\ S(t)X_s\subset X_s\quad (t\geq0)$$

が成り立つ。X_u, X_sはそれぞれシステム(S)の不安定部分空間，安定部分空間と呼ばれる。また$\lambda_1<0$のときは$X_u=\{0\}$とする。

システム(S)は定理(2．7, ii)より，分解$X=X_u\oplus X_s$に従って，

$$(3.12)\qquad \begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_u(t)\\x_s(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_u&0\\0&A_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_u(t)\\x_s(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_u\\B_s\end{bmatrix}u(t)\\[2ex] y(t)=\begin{bmatrix}C_u&C_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_u(t)\\x_s(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

のように表現される。ここで，$x_u(t):=\Pi x(t)$, $x_s(t):=(I-\Pi)x(t)$, $A_u:=A\,|_{X_u}$, $A_s:=A\,|_{X_s}$, $B_u:=\Pi B$, $B_s:=(I-\Pi)B$, $C_u:=C\,|_{X_u}$, $C_s:=C\,|_{X_s}$. このとき再び定理(2．7, ii)より$A_u\in B(X_u)$, $A_s:(D(A)\cap X_s\subset X_s)\to X_s$は稠密に定義された閉作用素となり，

$$\sigma(A_u)=\sigma(A)\cap\boldsymbol{C}_+=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N\}$$

$$\sigma(A_s)=\sigma(A)\cap\boldsymbol{C}_-=\{\lambda_{N+1},\lambda_{N+2},\cdots\}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{C}_+:=\{s\in\boldsymbol{C}\,;\,Re\,s\geq0\}=\overline{\boldsymbol{C}_0}$, $\boldsymbol{C}_-:=\{s\in\boldsymbol{C}\,;\,Re\,s<0\}$. また，$A_u$, A_sはそれぞれの空間上の半群の生成作用素となる。B_u, B_s, C_u, C_sはそれぞれの空間で有界かつ線形である。

X_u上のシステム(S_u)

$$(S_u)\qquad \begin{cases}\dot{x}_u(t)=A_ux_u(t)+B_uu(t)\\ y_u(t)=C_ux_u(t)\end{cases}$$

は，定理(2．7, ii, iv)より$\dim X_u<\infty$となるので，有限次元システムとなる。またシステム作用素A_uの固有値がすべて非負なので，定理(3．4, ii)より，システム(S_u)は不安定である。

一方X_s上のシステム(S_s)

$$(S_s)\qquad \begin{cases}\dot{x}_s(t)=A_sx_s(t)+B_su(t)\\ y_s(t)=C_sx_s(t)\end{cases}$$

はシステム(S)と同様に仮定(3．9)，(3．10)を満たす。また，

$$(3.13)\qquad -\delta:=\sup\{\lambda\,;\,\lambda\in\sigma(A_s)\}=\lambda_{N+1}<0$$

なので，定理(2．14, ii)より$-\delta$が(S_s)の発展定数となり，定理(3．4, i)より(S_s)は内部安定となる。

このように，システム(S)を安定なシステム(S_s)と，不安定な有限次元システム(S_u)とに分解することができる。このようなシステムの分解は，伝達関数の意味においても可能である。

(3．14)　定理

システム(S)の伝達関数を$W(s)$とする。伝達関数$W(s)$に対して，$\boldsymbol{C}_+$にのみ特異点をもつ関数$W_+(s)$と，$\boldsymbol{C}_-$にのみ特異点をもつ関数$W_-(s)$を適当にとると，$W(s)$は，

$$W(s)=W_+(s)+W_-(s)$$

と表わされる。このとき，$W_+(s)$, $W_-(s)$ はそれぞれ (S_u), (S_s) の伝達関数となる。■

この定理は，システム (S) の表現(3.12)に従って伝達関数 $W(s)$ を求めると容易に得られる。次の2つの定理は重要である。

(3.15)　定理

システム (S) に対して，次の(i)-(iii)は同値である。

(i)　(S) が内部安定である。

(ii)　$X_u=\{0\}$

(iii)　$\boldsymbol{C}_+=\{s\in\boldsymbol{C};\ Re\ s\geq 0\}\subset\rho(A)$

(証明)

(i)⇔(ii)は定義より明らか。

(i)⇒(iii)　(S) が内部安定であるとすると，定理(3.4，i)より，(S) の発展定数は負となる。従って，$\rho(A)\supset\boldsymbol{C}_+$.

(iii)⇒(i)　$\rho(A)\supset\boldsymbol{C}_+$ とする。このとき，定理(2.14，i)より，$\Delta:=\{\lambda\in\sigma(A);\ Re\ \lambda\geq -1\}$ は有限集合となる。ここで，$\Delta=\phi$ ならば，$\Delta\subset\rho(A)$ となるので，(S) の発展定数は-1以下となり，定理(3.4，i)より (S) は内部安定となる。

$\Delta\neq\phi$ のとき，Δ が有限集合なので

$$\alpha:=\max\{\lambda;\ \lambda\in\sigma(A),\ Re\ \lambda\geq -1\}<0$$

とおくと，$\alpha=\sup\{\lambda;\ \lambda\in\sigma(A)\}$ となる。定理(2.14，ii)より α は発展定数となるので，(S) は内部安定となる。■

(3.16)　定理

システム (S) に対して，次の(i)-(iv)が同値である。

(i)　(S) が入出力安定である。

(ii)　X_u 上の有限次元システム (S_u) が入出力安定である。

(iii)　伝達関数 $W(\cdot)$ が $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則である。

(iv)　$\tilde{X}_c\subset\tilde{X}_{uo}$.　ここで，$\{S_u(t);\ t\geq 0\}$ を (S) の半群とし，

$$\tilde{X}_c:=\overline{L(\bigcup_{t\geq 0}S_u(t)B_uU)},\ \tilde{X}_{uo}:=\bigcap_{t\geq 0}\mathrm{Ker}(C_uS_u(t))$$

■

この定理を証明する前に，次の補題を準備する。

(3.17)　補題

システム (S) の伝達関数 $W(s)$ が，適当な $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$W(s)=0\quad(s\in\boldsymbol{C}_\alpha)$$

となるための必要十分条件は，システム (S) において，$X_c\subset X_{uo}$ が成り立つことである。ここで，

$$X_c:=\overline{L(\bigcup_{t\geq 0}S(t)BU)},\ X_{uo}:=\bigcap_{t\geq 0}\mathrm{Ker}(CS(t))$$

(証明)

伝達関数 $W(s)=C(sI-A)^{-1}B$ が $\boldsymbol{C}_\alpha$ 上で恒等的に0であるとする。この伝達関数をラプラス逆変換すると，

$$CS(t)Bu=0\quad(t\geq 0,\ u\in U)\qquad(1)$$

が得られる。

$x\in X_c$ とすると，$\{(t_n, a_n, u_n);\ t_n\geq 0,\ a_n\in\boldsymbol{R},\ u_n\in U\}$ を適当にとって，

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nS(t_n)Bu_n$$

とできる。ここで，$x_n:=a_nS(t_n)Bu_n(\in X_c)$ とおく。このとき，各 n に対して，(1)式より

$$CS(t)x_n=CS(t)(a_nS(t_n)Bu_n)$$
$$=a_nS(t+t_n)Bu_n=0\quad(t\geq 0)$$

従って，$CS(t)x=0\quad(t\geq 0)$.　故に，$x\in X_{uo}$.

逆に，$X_c\subset X_{uo}$ とする。任意の $u\in U$ に対して，$Bu\in X_c$ となるので，$Bu\in X_{uo}$, すなわち，

$$CS(t)Bu=0\quad(t\geq 0)$$

従って，上式をラプラス変換すると，適当な $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$W(s)u=C(sI-A)^{-1}Bu=0\quad(s\in\boldsymbol{C}_\alpha)$$

これより結果が従う。■

(定理(3.16)の証明)

(i)⇒(ii)　(S) が入出力安定であるとする。A_u, A_s が生成する半群をそれぞれ $\{S_u(t);\ t\geq 0\}$, $\{S_s(t);\ t\geq 0\}$ とするとき，定理(3.14)の結果をラプラス逆変換すると，

$$CS(t)Bu=C_uS_u(t)B_uu+C_sS_s(t)B_su$$
$$(t\geq 0,\ u\in U)\quad(1)$$

が得られる。今，(S) が入出力安定で，(S_s) が内部安定なので

$$\|CS(t)B\|\leq M_1e^{-\alpha_1t}\quad(t\geq 0)$$
$$\|C_sS_s(t)B_s\|\leq M_2e^{-\alpha_2t}\quad(t\geq 0)$$

を満たす正数 α_1, α_2, M_1, M_2 が存在する。ここで，

$$\alpha:=\min(\alpha_1,\alpha_2),\ M:=\max(M_1,M_2)$$

とおくと，$\alpha>0$.　従って，(1)式より

$$\|C_uS_u(t)B_uu\|\leq\|CS(t)Bu\|+\|B_sS_s(t)B_su\|$$
$$\leq Me^{-\alpha t}\|u\|+Me^{-\alpha t}\|u\|$$

$$=2Me^{-\alpha t}\|u\| \quad (t\geq 0,\ u\in U)$$

すなわち,

$$\|C_uS_u(t)B_u\|\leq 2Me^{-\alpha t} \quad (t\geq 0)$$

故に, X_u 上のシステム (S_u) が入出力安定となる。

(ii) ⇒ (iii) 定理(3.14)より, システム (S) の伝達関数 $W(s)$ は, (S_s) の伝達関数 $W_s(s)$ と (S_u) の伝達関数 $W_u(s)$ を用いて,

$$W(s)=W_s(s)+W_u(s) \tag{2}$$

と表わせる。ここで, $W_s(\cdot)$, $W_u(\cdot)$ はそれぞれ $\boldsymbol{C}_-$, $\boldsymbol{C}_+$ にのみ特異点をもつ。

一方, システム (S_u) が入出力安定であるとすると,

$$\|C_uS_u(t)B_u\|\leq Me^{-\alpha t} \quad (t\geq 0) \tag{3}$$

となる正数 α, Mが存在する。ここで, $\{S_u(t);\, t\geq 0\}$ はシステム (S_u) の半群である。システム (S_u) において(3)式と定理(3.4, iv)および, $\boldsymbol{C}_{-\alpha}\supset\boldsymbol{C}_+$ より, 伝達関数 $W_u(\cdot)$ の $\boldsymbol{C}_+$ 内の特異点は除去可能である。すなわち, $W_u(\cdot)$ は全平面 $\boldsymbol{C}$ で正則となる。一方, (S_u) は有限次元システムなので, 行列 $W_u(s)$ の各成分は有理関数となる。さらに, それらの有理関数はすべて分子の次数よりも分母の次数の方が高い多項式によって表わされるので,

$$\lim_{|s|\to\infty}\|W_u(s)\|=0$$

となる。従って, リュービルの定理より, $W_u(s)=0$ となる。これと, (2)式より (S) の伝達関数 $W(s)$ は $W(s)=W_s(s)$ となり, $\boldsymbol{C}_+$ に特異点を持たない。すなわち, $W(\cdot)$ は $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則となる。

(iii) ⇒ (iv) (S) の伝達関数 $W(s)$ が $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則となると, X_u 上のシステム (S_u) の伝達関数 $W_u(s)$ が恒等的に0になることがわかる。ここで, 補題(3.17)をシステム (S_u) に適用すると, $\tilde{X}_c\subset\tilde{X}_{u0}$ となり結果が得られる。

(iv) ⇒ (i) $u\in U$ に対して,

$$CS(t)Bu=CS(t)(B_uu+B_su)$$
$$=C_uS_u(t)B_uu+C_sS_s(t)B_su \quad (t\geq 0)$$

このとき, $B_uu\in\tilde{X}_c\subset\tilde{X}_{u0}$ なので,

$$C_uS_u(t)B_uu=0 \quad (t\geq 0,\ u\in U).$$

従って, $CS(t)Bu=C_sS_s(t)B_su \quad (t\geq 0,\ u\in U)$.
今, (S_s) は内部安定なので, 任意の $t\geq 0$, $u\in U$ に対して

$$\|CS(t)Bu\|=\|C_sS_s(t)B_su\|\leq Me^{-\alpha t}\|u\|$$

を満たす正数α, Mが存在する。故に, (S) は入出力安定となる。■

4. 無限次元安定化補償器の構成

仮定(3.9), (3.10)を満たすシステム(3.1)が不安定であるとする。すなわち, システム (S) において, $X_u\neq\{0\}$. このとき, (S) に対する安定化補償器を構成するために次の仮定を設ける。

(4.1) 仮定

有限次元システム (S_u) が可制御かつ可観測である。■

本節ではこの仮定を満たすシステム (S) に対する無限次元内部安定化補償器を構成する。(S) に対する有限次元入出力安定化補償器は, 本節を参考にして次節において構成する。

X_u 上の有限次元システム $(S_u)=(C_u, A_u, B_u)$ において, 正数 α_f, α_g に対して, 仮定(4.1)と定理(3.8)より

(4.2, a) $\sup\{Re\,\lambda;\,\lambda\in\sigma(A_u+B_uF_u)\}\leq-\alpha_f$

(4.3, a) $\sup\{Re\,\lambda;\,\lambda\in\sigma(A_u+G_uC_u)\}\leq-\alpha_g$

を満たす線形作用素 F_u, G_u が存在する。このとき,

(4.2, b) $\|e^{(A_u+B_uF_u)}\|\leq M_fe^{-\alpha_ft} \quad (t\geq 0)$

(4.3, b) $\|e^{(A_u+G_uC_u)}\|\leq M_ge^{-\alpha_gt} \quad (t\geq 0)$

を満たす定数 M_f, M_g も存在する。すなわち, $A_u+B_uF_u$, $A_u+G_uC_u$ の発展定数がそれぞれ $-\alpha_f$, $-\alpha_g$ 以下となる。

今, 線形作用素 $F: X_u\oplus X_s\to U$, $G: Y\to X_u\oplus X_s$ を

$$F:=[F_u \quad 0] \quad G:=\begin{bmatrix}G_u\\0\end{bmatrix}$$

と定義すると, F, Gはともに有界となる。このとき, 次のような無限次元システムを考える。

$$(4.4) \quad \begin{cases}\dot{z}(t)=(A+BF+GC)z(t)+Gu_0(t)\\ y_0(t)=Fz(t)\end{cases}$$

このシステムは, システム (S_c) とも表わされ, 仮定(3.10)を満たすが, (3.9)を満たすとは限らない。2つのシステムの結合システム (S_c, S) の安定性について考察する。

2つのシステム (S), (S_s) のそれぞれの伝達関数を $W(s)$, $L(s)$ とするとき, 結合システム (S_c, S) の伝達関数 $H(s)$ は,

$$H(s)=\begin{bmatrix}(I+W(s)L(s))^{-1}W(s)L(s) & (I+L(s)W(s))^{-1}W(s)\\(I+W(s)L(s))^{-1}L(s) & (I+L(s)W(s))^{-1}L(s)W(s)\end{bmatrix}$$

と表わされる。ここで, $L(s)=F(sI-A-BF-GC)^{-1}G$, $W(s)=C(sI-A)^{-1}B$ である。

作用素値関数 $N(s), D(s), P(s), Q(s)$ を

(4.5, a) $N(s)=C(sI-A-BF)^{-1}B,$
$D(s)=I+F(sI-A-BF)^{-1}B$

(4.5, b) $P(s)=F(sI-A-GC)^{-1}G,$
$Q(s)=I-F(sI-A-GC)^{-1}B$

とおくとき，$A+BF, A+GC$ の $X=X_u \oplus X_s$ 上のそれぞれの表現

$$(4.6)\quad \begin{cases} A+BF=\begin{bmatrix} A_u+B_uF_u & 0 \\ B_sF_u & A_s \end{bmatrix} \\ A+GC=\begin{bmatrix} A_u+G_uC_u & G_uC_s \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

より，$\sigma(A+BF)=\sigma(A_u+B_uF_u)\cup\sigma(A_s)\subset \boldsymbol{C}_-$, $\sigma(A+GC)=\sigma(A_u+G_uC_u)\cup\sigma(A_s)\subset \boldsymbol{C}_-$ なので，$N(\cdot)$, $D(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot)$ は $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則となり，

(4.7, a) $N(s)D^{-1}(s)=W(s)$

(4.7, b) $Q^{-1}(s)P(s)=L(s)$

を満たす。さらに，

$$Q(s)D(s)+P(s)N(s)=I \quad (s\in \boldsymbol{C}_+)$$

に注意すると，結合システム (S_c, S) の伝達関数 $H(s)$ は，

$$H(s)=\begin{bmatrix} N(s)P(s) & N(s)Q(s) \\ D(s)P(s) & I-D(s)Q(s) \end{bmatrix}$$

と書き換えられる。上式の $H(s)$ のすべてのブロックの関数が $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則なので，$H(\cdot)$ もまた $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則となり，定理(3.16)より結合システム (S_c, S) は入出力安定となる。

一方，結合システム (S_c, S) の状態方程式は(1, 3)式のように表わされるが，結合システムの状態を $(x, e)=(x, x-z)$ に変換すると，次のような状態方程式が得られる。

$$(4.8)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A+GC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad +\begin{bmatrix} 0 & B \\ -G & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F & -F \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

ここで，$(v_0, y_0), (v_1, y_1)$ はそれぞれ $(S_c), (S)$ の入出力対である。このとき，$A+BF, A+GC$ の表現(4.6)と(4.2)，(4.3)，(3.13)および定理(2.12)より，$A+BF, A+GC$ の発展定数はそれぞれ $-\min(\delta, \alpha_f)$, $-\min(\delta, \alpha_g)$ 以下となる。再び定理(2.12)を用いると，システム(4.8)の発展定数は $-\min(\delta, \alpha_f, \alpha_g)$ 以下となる。故に定理(3.4, i)より結合システム (S_c, S) は内部安定となる。

このように，システム (S) が仮定(4.1)を満たすとき，(4.4)式によって与えられる無限次元システムは不安定なシステム (S) に対する無限次元内部安定化補償器となる。

5. 有限次元入出力安定化補償器の構成

仮定(3.9)，(3.10)，(4.1)を満たすシステム(3.1)，すなわち，仮定(4.1)を満たすシステム (S) に対して，前節において，無限次元の内部安定化補償器 (S_c) を構成した。しかし，無限次元システムは実際の設計に適さないので，有限次元補償器によるシステム (S) の安定化を図る。本報告では，結合システムの入出力安定性について考察する。

次のような X_u 上の有限次元システムを構成する。

$$(5.1)\quad \begin{cases} \dot z(t)=(A_u+B_uF_u+G_uC_u)z(t)+G_uu_0(t) \\ y_0(t)=F_uz(t) \end{cases}$$

ここで，F_u, G_u は(4.2)，(4.3)式を満たす作用素である。この有限次元システムを (S_{cu}) と表わす。システム (S_{cu}) の伝達関数 $L_u(s)$ は

(5.2, a) $L_u(s)=F_u(sI-A_u-B_uF_u-G_uC_u)^{-1}G_u$

となり，

(5.2, b) $P_u(s):=F_u(sI-A_u-G_uC_u)^{-1}G_u,$
$Q_u(s):=I-F_u(st-A_u-G_uC_u)^{-1}B_u$

とおくと，(4.3, a)式より，$P_u(\cdot), Q_u(\cdot)$ は $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則となり，次式を満たす。

(5.2, c) $L_u(s)=Q_u^{-1}(s)P_u(s)$

ここで，

(5.3) $\varDelta Q_u(s):=Q(s)-Q_u(s)$
$=-F_u(sI-A_u-G_uC_u)^{-1}G_uC_s\times$
$\times(sI-A_s)^{-1}B_s$

とおき，$P_u(s)=P(s)$ に注意すると，

$$Q_u(s)D(s)+P_u(s)N(s)=I-\varDelta Q_u(s)D(s) \quad (s\in \boldsymbol{C}_+)$$

が得られる。これらのことより，結合システム (S_{cu}, S) の伝達関数 $H_u(s)$ は

(5.4) $H_u(s)=$

$$\begin{bmatrix} N(s)(I-\varDelta Q_u(s)D(s))^{-1}P_u(s) & N(s)(I-\varDelta Q_u(s)D(s))^{-1}Q_u(s) \\ D(s)(I-\varDelta Q_u(s)D(s))^{-1}P_u(s) & I-D(s)(I-\varDelta Q_u(s)D(s)^{-1}Q_u(s) \end{bmatrix}$$

となる。これより次の定理が得られる。

(5.5) 定理

次式を満たす正数 ε

$\inf\{|\det(I-\varDelta Q_u(s)D(s))|; s\in \boldsymbol{C}_+\}\geq\varepsilon$ または

$\inf\{|\det(I-\Delta Q_u(jw)D(jw))|;\ \omega\in\boldsymbol{R},\ j=\sqrt{-1}\}\geq\varepsilon$
が存在するならば，結合システム(S_{cu}, S)は入出力安定となる。

（証明） 次式を満たす正数εが存在するとする。

$$\inf\{|\det(I-\Delta Q_u(s)D(s))|;\ s\in\boldsymbol{C}_+\}\geq\varepsilon$$

これより，各$s\in\boldsymbol{C}_+$において，(m, m)行列$I-\Delta Q_u(s)D(s)$は逆行列をもつ。また，$I-\Delta Q_u(\cdot)D(\cdot)$が$\boldsymbol{C}_+$上で正則なので，逆行列$(I-\Delta Q_u(\cdot)D(\cdot))^{-1}$もまた，$\boldsymbol{C}_+$上で正則となる。従って，(5．4)式で表わされる結合システム(S_{cu}, S)の伝達関数$H_u(s)$は$\boldsymbol{C}_+$上で正則となり，定理(3．16)より結合システムは入出力予定となる。

また，$I-\Delta Q_u(\cdot)D(\cdot)$は$\boldsymbol{C}_+$上で正則なので，$\det(I-\Delta Q_u(\cdot)D(\cdot))$もまた$\boldsymbol{C}_+$上で正則となる。ここで，正則関数の最大値の定理を用いると，

$$\inf\{|\det(I-\Delta Q_u(jw)D(jw))|;\ \omega\in\boldsymbol{R},\ j=\sqrt{-1}\}$$
$$=\inf\{|\det(I-\Delta Q_u(s)D(s))|;\ s\in\boldsymbol{C}_+\}$$

となり，後半の結果が従う。■

次節の例のように，仮定(4．1)を満たすシステム(S)に対して，(4．2)，(4．3)式を満たすF_u, G_uを用いて，(5．1)式のように有限次元補償器(S_{cu})を構成しても，結合システム(S_{cu}, S)が入出力安定となるとは限らない。また同じシステム(S)に対しても，F_u, G_uの取り方によっては，結合システムの安定性が変わることもある。そこで，次のような考察をする。

まず，仮定(4．1)を満たすシステム(S)に対して，(4．2)，(4．3)式を満たすF_u, G_uを選んで固定する。任意の$\gamma>0$に対して，定理(2．14，i)より，$\sigma(A)\cap\overline{\boldsymbol{C}_{-\gamma}}=\{\lambda\in\sigma(A);\ \lambda\geq-\gamma\}$は有限集合となるので，

(5．6) $\qquad 0>\lambda_{N+1}>\cdots>\lambda_K\geq-\gamma>\lambda_{K+1}$

となる整数$K(\geq N)$が存在する。このとき，

$$\Pi:=E(\lambda_{N+1})+E(\lambda_{N+2})+\cdots+E(\lambda_K)$$

として，X_s上のシステム$(S_s)=(C_s, A_s, B_s)$に定理(2．7，ii)を適用すると，$X_1:=\Pi X_s\subset D(A_s)=D(A)\cap X_s$, $\dim X_1<\infty$，$X_2:=(I-\Pi)X_s$, $X_s=X_1\oplus X_2$となって，システム(S_s)は

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}u(t)\\[2ex] y_s(t)=[C_1\quad C_2]\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

のように表現される。ここで，$x_1(t):=\Pi x_s(t)$, $x_2(t):=(I-\Pi)x_s(t)$, $A_1:=A_s|_{X_1}$, $A_2:=A_s|_{X_2}$, $B_1:=\Pi B_s$, $B_2:=(I-\Pi)B_s$, $C_1:=C_s|_{X_1}$, $C_2:=C_s|_{X_2}$. このとき，X_2上のシステム(C_2, A_2, B_2)は，(S_s)と同様仮定(3．9)，(3．10)を満たす。すなわち，(5．6)式，(3．11)式より，

(5．7) $\qquad \|R(s;A_2)\|\leq\dfrac{1}{Re\,s+\gamma}\qquad(s\in\boldsymbol{C}_{-\gamma})$

が成り立つ。

このとき，次のような$X_\gamma:=X_u\oplus X_1$上のシステム

(5．8) $\qquad \begin{cases}\dot{z}(t)=(A_\gamma+B_\gamma F_\gamma+G_\gamma C_\gamma)z(t)+G_\gamma u_0(t)\\ y_0(t)=F_\gamma z(t)\end{cases}$

を考える。ここで，

$$A_\gamma:=\begin{bmatrix}A_u&0\\0&A_1\end{bmatrix},\ B_\gamma:=\begin{bmatrix}B_u\\B_1\end{bmatrix},\ C_\gamma:=[C_u\quad C_1]$$

$$F_\gamma:=[F_u\quad 0]\quad G_\gamma:=\begin{bmatrix}G_u\\0\end{bmatrix}$$

すなわち，システム(5．8)は，

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}A_u+B_uF_u+G_uC_u&G_uC_1\\B_1F_u&A_1\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}G_u\\0\end{bmatrix}u_0(t)\\[2ex] y_0(t)=[F_u\quad 0]\,z(t)\end{cases}$$

となる。このシステムは$(S_{c\gamma})$とも表わされる。システム$(S_{c\gamma})$の伝達関数$L_\gamma(s)$は

$$L_\gamma(s)=F_\gamma(sI-A_\gamma-B_\gamma F_\gamma-G_\gamma C_\gamma)^{-1}G_\gamma$$

となり，

$$P_\gamma(s):=F_\gamma(sI-A_\gamma-G_\gamma C_\gamma)^{-1}G_\gamma$$
$$Q_\gamma(s):=I-F_\gamma(sI-A_\gamma-G_\gamma C_\gamma)^{-1}B_\gamma$$

とおくと，

$$A_\gamma+G_\gamma C_\gamma=\begin{bmatrix}A_u+G_uC_u&G_uC_1\\0&A_1\end{bmatrix}$$

より，$\sigma(A_\gamma+G_\gamma C_\gamma)=\sigma(A_u+G_uC_u)\cup\sigma(A_1)\subset\boldsymbol{C}_-$なので，$P_\gamma(\cdot)$, $Q_\gamma(\cdot)$はともに$\boldsymbol{C}_+$上で正則となり，$L_\gamma(s)=Q_\gamma^{-1}(s)P_\gamma(s)$を満たす。ここで，

(5．9) $\qquad \Delta Q_\gamma(s):=Q(s)-Q_\gamma(s)$

$$=-F_\gamma(sI-A_\gamma-G_\gamma C_\gamma)^{-1}G_\gamma C_2(sI-A_2)^{-1}B_2$$
$$=-F_u(sI-A_u-G_uC_u)^{-1}G_uC_2(sI-A_2)^{-1}B_2$$

とおき，$P_\gamma(s)=P(s)$に注意すると，

$$Q_\gamma(s)D(s)+P_\gamma(s)N(s)=I-\Delta Q_\gamma(s)D(s)\quad(s\in\boldsymbol{C}_+)$$

が得られる。これらのことより，結合システム$(S_{c\gamma}, S)$の伝達関数$H_\gamma(s)$は

$H_\gamma(s)=$

$$\begin{bmatrix}N(s)(I-\Delta Q_\gamma(s)D(s))^{-1}P_\gamma(s)&N(s)(I-\Delta Q_\gamma(s)D(s))^{-1}Q_\gamma(s)\\D(s)(I-\Delta Q_\gamma(s)D(s))^{-1}P_\gamma(s)&I-D(s)(I-\Delta Q_\gamma(s)D(s))^{-1}Q_\gamma(s)\end{bmatrix}$$

と表わされ，定理(5．5)と同様に次の定理が成り立つ。

(5.10) 定理

次式を満たす正数 ε

$\inf\{|\det(I-\Delta Q_\gamma(s)D(s))|;s\in \boldsymbol{C}_+\}\geq\varepsilon$ または

$\inf\{|\det(I-\Delta Q_\gamma(jw)D(jw))|;\omega\in\boldsymbol{R},j=\sqrt{-1}\}\geq\varepsilon$

が存在するならば，結合システム $(S_{c\gamma},S)$ は入出力安定となる。■

また，次の定理も成り立つ。

(5.11) 定理

結合システム $(S_{c\gamma},S)$ が入出力安定となるための十分条件は，適当な正数 $\varepsilon<1$ に対して

$$\sup\{\|\Delta Q_\gamma(jw)D(jw)\|;\omega\in\boldsymbol{R},j=\sqrt{-1}\}\leq\varepsilon \quad (1)$$

が成り立つことである。

(証明) 各 $s\in\boldsymbol{C}_+$ において，有界線形作用素 $I-Q_\gamma(s)D(s)$ の有界な逆が存在するための十分条件は，定理(2.5，i)より，次式が成り立つことである。

$$\|\Delta Q_\gamma(s)D(s)\|<1$$

従って，次式を満たす正数 $\varepsilon<1$

$$\sup\{\|\Delta Q_\gamma(s)D(s)\|;s\in\boldsymbol{C}_+\}\leq\varepsilon$$

が存在すれば，有界な $(I-\Delta Q_\gamma(s)D(s))^{-1}$ がすべての $s\in\boldsymbol{C}_+$ において存在し，$(I-\Delta Q_\gamma(\cdot)D(\cdot))^{-1}$ は $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則となる。すなわち，結合システム $(S_{c\gamma},S)$ は入出力安定となる。

従って，正則関数の最大値の定理を用いて，虚軸上において，(1)式が成立すれば良いことがわかる。■

今，(5.9)式，(4.5，a)式より，

$$\|\Delta Q_\gamma(s)D(s)\|\leq\|F_u(sI-A_u-G_uC_u)^{-1}G_u\|\,\|C_2(sI-A_2)^{-1}B_2\|$$
$$\times\{1+\|F(sI-A-BF)^{-1}B\|\}$$

となる。ここで，(4.2，b)式と定理(2.11，ii)より

$$1+\|F(sI-A-BF)^{-1}B\|$$
$$\leq 1+\|F_u\|\,\|(sI-A_u-B_uF_u)^{-1}\|\,\|B_u\|$$
$$\leq 1+\frac{M_f\|F_u\|\,\|B_u\|}{Re\,s+\alpha_f} \quad (s\in\boldsymbol{C}_{-\alpha_f})$$

同様に，(4.3，b)式と定理(2.11，ii)より，

$$\|F_u(sI-A_u-G_uC_u)^{-1}G_u\|\leq\frac{M_g\|F_u\|\,\|G_u\|}{Re\,s+\alpha_g} \quad (s\in\boldsymbol{C}_{-\alpha_g})$$

また，(5.7)式より

$$\|C_2(sI-A_2)^{-1}B_2\|\leq\frac{\|B\|\,\|C\|}{Re\,s+\gamma} \quad (s\in\boldsymbol{C}_{-\gamma})$$

ここで，$-\alpha_f,-\alpha_g,-\gamma<0$ なので，$s\in\boldsymbol{C}_+$ に対して

(5.12)
$$\|\Delta Q_\gamma(s)D(s)\|$$
$$\leq\frac{M_g\|F_u\|\,\|G_u\|}{Re\,s+\alpha_g}\cdot\frac{\|B\|\,\|C\|}{Re\,s+\gamma}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{M_f\|F_u\|\,\|B_u\|}{Re\,s+\alpha_f}\right\}$$
$$\leq\frac{M_1(\alpha_f+M_2)}{\alpha_f\alpha_g\gamma}$$

ここで，

(5.13)
$$M_1:=M_g\|F_u\|\,\|G_u\|\,\|B\|\,\|C\|,$$
$$M_2:=M_f\|F_u\|\,\|B_u\|$$

このとき，

(5.14)
$$\gamma>\frac{M_1(\alpha_f+M_2)}{\alpha_f\alpha_g}$$

なる γ をとると，(5.12)式より，

$$\|\Delta Q_\gamma(jw)D(jw)\|\leq\frac{M_1(d_f+M_2)}{\alpha_f\alpha_g\gamma}<1 \quad (\omega\in\boldsymbol{R})$$

となる。以上のことと定理(5.11)より次の定理を得る。

(5.15) 定理

システム (S) が仮定(4.1)を満たすとする。すなわち，システム(3.1)が仮定(3.9)，(3.10)，(4.1)を満たすとする。このとき，(5.14)式を満たす正数 γ に対して(5.8)式のように定義される有限次元補償器 $(S_{c\gamma})$ は，結合システム $(S_{c\gamma},S)$ を入出力安定とする。また補償器の次元 n は，γ に対して

$$\lambda_K\geq-\gamma>\lambda_{K+1}$$

なる整数 K をとるとき，

$$n=\sum_{k=1}^{K}\dim E(\lambda_k)X$$

で与えられる。■

6．例

$X=L^2(0,1)$, すなわち，

$$X:=\{x(\cdot):(0,1)\to\boldsymbol{R};\int_0^1|x(\xi)|^2d\xi<\infty\}$$

とすると，$\{\varphi_n(\xi):=\sqrt{2}\sin n\pi\xi\ (\xi\in[0,1]);n\geq1\}$ は X の完全正規直交系となる。すなわち，

$$X=\overline{\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}}$$

$$\|\varphi_n\|=\left(\int_0^1|\varphi_n(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

$$\langle\varphi_k,\varphi_\ell\rangle=\int_0^1\varphi_k(\xi)\varphi_\ell(\xi)d\xi=0 \quad (k\neq\ell)$$

今，

(6.1，a)
$$\begin{cases} D(A):=\left\{x\in X;\dfrac{d}{d\xi}x\in X,\dfrac{d^2}{d\xi^2}x\in X,x(0)=x(1)=0\right\} \\ (Ax)(\xi):=\dfrac{d^2x(\xi)}{d\xi^2}+2\pi^2x(\xi) \quad (x\in D(A)) \end{cases}$$

なる線形作用素を定義する。また，$U=Y=\boldsymbol{R}$ として線形作用素 $B:U\to X$, $C:X\to Y$ を次のように定義する。

(6.1, b)　$(Bu)(\xi):=ub(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}ub_i\varphi_i(\xi)$　$(u\in U)$

(6.1, c)　$C\varphi_i:=\langle c(\cdot),\varphi_i(\cdot)\rangle=c_i$　$(i=1,2,\cdots)$

ここで，$b(\xi)=-\frac{\pi\xi}{\sqrt{2}}$, $c(\xi)=-2\sin 2\pi\xi+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$　$(\xi\in[0,1])$ とする。従って，

(6.2, a)　$b_n=\frac{(-1)^n}{n}$　$(n\geq 1)$

(6.2, b)　$c_1=1,\ c_2=-\sqrt{2},$

$$c_{2n-1}=\frac{1}{2n-1},\ c_{2n}=0\quad(n\geq 2)$$

となる。このように作用素A，B，Cを定義すると，AはX上の半群を生成し仮定(3.9)，(3.10)を満たす。またB，Cは有界作用素となる。これらの作用素によって表現される無限次元システム (C,A,B)

(6.3)　$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}$

を考える。システム(6.3)のシステム作用素Aの固有値 λ_n は，$\lambda_n=(2-n^2)\pi^2$　$(n\geq 1)$ であり，固有値 λ_n に対応する固有空間は $\mathrm{span}\{\varphi_n\}$ である。また，$\lambda_1=\pi^2>0>\lambda_2=-2\pi^2$ なので，システム(6.3)の不安定部分空間 X_u, 安定部分空間 X_s はそれぞれ，

$$X_u=\mathrm{span}\{\varphi_1\},\ X_s=\overline{\mathrm{span}\{\varphi_2,\varphi_3,\cdots\}}$$

となる。作用素A，B，CをXの分解 $X=X_u\oplus X_s$ に従って表現すると，

$$A=\begin{bmatrix}A_u & 0\\ 0 & A_s\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}B_u\\ B_s\end{bmatrix}\quad C=[C_u\quad C_s]$$

ここで，$A_u:=\lambda_1=\pi^2$, $B_u=b_1=-1$, $C_u:=c_1=1$, $A_s:=\mathrm{diag}[\lambda_2,\lambda_3,\cdots]$, $B_s:=[b_2,b_3,\cdots]^{\mathrm{T}}$, $C_s:=[c_2,c_3,\cdots]$, $\mathrm{diag}[a_1,a_2,\cdots]$ は対角成分に $a_1,a_2,a_3\cdots$をもち，非対角成分に0をもつ作用素，b^{T}はベクトルbの転置を表わす。このとき，$b_1\neq 0$, $c_1\neq 0$ なので X_u 上のシステム (C_u,A_u,B_u) は可制御かつ可観測となる。以上のことより，システム(6.3)は，仮定(3.9)，(3.10)，(4.1)を満たす。

有限次元システム (C_u,A_u,B_u) に対して，

$$f=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ g=-2$$

をとり，$F_u=f_u\in\boldsymbol{R}$, $G_u=g_u\in\boldsymbol{R}$ を

$$A_u+B_uF_u=\lambda_1-f_u=f\pi^2,\ A_u+G_uC_u=\lambda_1+g_u=g\pi^2$$

が満たされるように選ぶ。この F_u, G_u を用いて(5.1)式のように X_u 上のシステム (S_{cu}) を構成すると，

(6.4)　$\begin{cases}\dot{z}(t)=(\lambda_1-f_u+g_u)z(t)+g_uu_0(t)\\ y(t)=f_uz(t)\end{cases}$

となる。この補償器の伝達関数 $L_u(s)$ は(5.2)式より，

$$L_u(s)=\frac{f_ug_u}{s-\lambda_1+f_u-g_u}=Q_u^{-1}(s)P_u(s)\in\boldsymbol{R}$$

ここで，

$$P_u(s)=\frac{-\pi^4(f-1)(g-1)}{s-g\pi^2}\in\boldsymbol{R}$$

$$Q_u(s)=\frac{s-(f+g-1)\pi^2}{s-g\pi^2}\in\boldsymbol{R}$$

一方，システム(6.3)の伝達関数 $W(s)$ は(4.5, a)，(4.7, a)式より，$W(s)=N(s)D^{-1}(s)$ とするとき，

$$N(s)=C(sI-A-BF)^{-1}B\in\boldsymbol{R}$$

$$D(s)=I+F_u(sI-A_u-B_uF_u)^{-1}B_u=\frac{s-\pi^2}{s-f\pi^2}\in\boldsymbol{R}$$

また，補償器(6.4)とシステム(6.3)の結合システムの伝達関数 $H_u(s)$ は，(5.4)式と $P_u(s)$, $Q_u(s)$, $N(s)$, $D(s)$ がすべて実数値関数であることより，

(6.5)　$H_u(s)=\begin{bmatrix}H_u^{11}(s) & H_u^{12}(s)\\ H_u^{21}(s) & H_u^{22}(s)\end{bmatrix}$

ここで，

$$H_u^{11}(s)=N(s)P_u(s)(I-\Delta Q_u(s)D(s))^{-1}$$

$$H_u^{12}(s)=N(s)Q_u(s)(I-\Delta Q_u(s)D(s))^{-1}$$

$$H_u^{21}(s)=D(s)P_u(s)(I-\Delta Q_u(s)D(s))^{-1}$$

$$H_u^{22}(s)=I-D(s)Q_u(s)(I-\Delta Q_u(s)D(s))^{-1}$$

となる。このとき，(5.3)式より，

$$\Delta Q_u(s)=\frac{\pi^4(f-1)(g-1)}{s-g\pi^2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{b_ic_i}{s-\lambda_i}$$

故に，

$$I-\Delta Q_u(s)D(s)=1+\frac{\pi^4(f-1)(g-1)(s-\pi^2)}{(s-g\pi^2)(s-f\pi^2)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{(s-2\pi^2)+(2n+1)^2\pi^2\}(2n+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2}(s+2\pi^2)}\right\}$$

今，$x\in[-2,0)$ に対して，

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{x+(2n+1)^2\}(2n+1)^2}$$

とおくとき，[15, p.68] より，

$$q(x)=\frac{1}{x}\left\{\frac{\pi^2}{8}-1-\frac{\pi}{4\sqrt{|x|}}\tan\frac{\pi\sqrt{|x|}}{2}+\frac{1}{1+x}\right\}\quad(x\neq -1)$$

$$q(-1)=\frac{1}{4}$$

となり，$q(\cdot)$ は $[-2,0)$ 上の実数値連続関数となる。

ここで，$p(t):=I-\Delta Q_u(t\pi^2)D(t\pi^2)$ とおくと，

$$p(t)=1+\frac{(f-1)(g-1)(t-1)}{(t-g)(t-f)}\times\left\{q(t-2)+\frac{1}{\sqrt{2}(t+2)}\right\}$$

となり，$p(\cdot)$ は $[0,2)$ 上の実数値連続関数となる。今，$f=-\frac{1}{\sqrt{2}}, g=-2$ より，$t=0, t=1$ において，

$$p(0)\fallingdotseq-0.3135<0,\ p(1)=1>0$$

となる。故に，中間値の定理より

$$p(t_0)=I-\Delta Q_u(t_0\pi^2)D(t_0\pi^2)=0$$

となる $t_0\in(0,1)$ が存在する。すなわち，$s_0=t_0\pi^2\in \boldsymbol{C}_+$ は $I-\Delta Q_u(s)D(s)$ の零点である。

一方，$D(s)P_u(s)$ の零点は $s=\pi^2$ のみなので，$s_0=t_0\pi^2\in \boldsymbol{C}_+$ は $H_u^{21}(s)$ の特異点となっている。故に(6．5)式の $H_u(s)$ の(2．1)ブロックが $\boldsymbol{C}_+$ 内に特異点を持つことになり，その結果 $H_u(s)$ は $\boldsymbol{C}_+$ 上で正則とならない。従って定理(3.16)より，補償器(6．4)とシステム(6．3)の結合システムは入出力安定とはならない。すなわち，内部安定ともならない。

次に，システム(6．3)を入出力安定とする補償器を定理(5.15)に従って求める。

まず，$A_u+B_uF_u=f\pi^2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^2, A_u+G_uC_u=g\pi^2=-2\pi^2$ より，

$$e^{(A_u+B_uF_u)t}=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^2 t},\ e^{(A_u+G_uC_u)t}=e^{-2\pi^2 t}\quad(t\geq 0)$$

となる。従って，(4．2，b)，(4．3，b)において，

$$M_f=M_g=1,\ \alpha_f=\frac{\pi^2}{\sqrt{2}},\ \alpha_g=2\pi^2$$

また，

$$\|F_u\|=|f_u|=|\lambda_1-f\pi^2|=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi^2,$$

$$\|G_u\|=|g_u|=|g\pi^2-\lambda_1|=3\pi^2$$

さらに，

$$\|B\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}},\quad \|B_u\|=|b_1|=1$$

$$\|C\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2+\frac{\pi^2}{8}}$$

故に，(5．13)式より，

$$M_1=\|F_u\|\|G_u\|\|B\|\|C\|M_g=\frac{3(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{6}}\pi^5\sqrt{2+\frac{\pi^2}{8}}$$

$$M_2=\|F_u\|\|B_u\|M_f=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

従って，(5．14)の右辺は

$$\frac{M_1(\alpha_f+M_2)}{\alpha_f\alpha_g}=\frac{3(1+\sqrt{2})^2}{2\sqrt{6}}\sqrt{2+\frac{\pi^2}{8}}\pi^3\fallingdotseq 20.16\pi^2$$

今，$\gamma\geq 21\pi^2$ とすると，システム(6．3)と F_u, G_u に対して，(5．14)式を満たす。従って，定理(5．15)より，この γ に対して(5．8)式のように定義される有限次元補償器が，システム(6．3)を入出力安定化する。実際，この入出力安定化補償器は次のようになる。

$\gamma=21\pi^2$ として，$(2-K^2)\pi^2\geq-\gamma>(2-(K+1)^2)\pi^2$ とすると，

$$3.79\cdots<K\leq 4.79\cdots$$

となる。従って，$K=4$. ここで，システム(6．3)のシステム作用素の固有空間はすべて1次元なので，この場合の入出力安定化補償器は，4次元となる。また，その補償器は次のように記述される。

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}-\frac{6+\sqrt{2}}{2}\pi^2 & -3\sqrt{2}\pi^2 & -\sqrt{2}\pi^2 & 0\\ \frac{2+\sqrt{2}}{4}\pi^2 & -2\pi^2 & 0 & 0\\ -\frac{2+\sqrt{2}}{6}\pi^2 & 0 & -7\pi^2 & 0\\ \frac{2+\sqrt{2}}{8}\pi^2 & 0 & 0 & -14\pi^2\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}-3\pi^2\\0\\0\\0\end{bmatrix}u_0(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}\frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi^2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}z(t)\end{cases}$$

6．おわりに

定理(5．15)において，仮定(3．9)，(3．10)，(4．1)を満たす無限次元システムに対しては常に有限次元入出力安定補償器が存在することを示し，また同時にその補償器の次元も定まることを示した。この次元は条件式(5．14)より明らかなように，フィードバックゲイン F_u, G_u のノルムや，$A_u+B_uF_u, A_u+G_uC_u$ の発展定数の選び方に依存する。すなわち，F_u, G_u の取り方によっては，安定化補償器の低次元化も可能であろう。より低次元の安定化補償器の構成は，今後の課題の一つである。

本報告では，入出力安定化補償器の構成について議論したが，今後は，内部安定化や結合システムの発展定数の配置の問題についても考察していきたい。

最後に，本研究に関して有益なご討論およびご助言をいただいた東京電機大学稲葉博先生，大塚尚久先生

に厚くお礼申し上げます。

参考文献

[1] Triggiani, R.; On the Stabilizability Probrem in Banach Space. J. Math. Anal. Appl., vol. 52, pp. 383-403 (1975)

[2] Curtain, R. F.; The Spectrum Determined Growth Assumption for Perturbations of Analytic Semigroups. Syst. Cont. Lett., vol. 2, pp. 106-109 (1982)

[3] ———; Finite Dimensional Compensators for Parabolic Distributed Systems with Unbounded Control and Observation. SIAM J. Cont. Optim., vol. 22, pp. 255-276 (1984)

[4] Sakawa, Y.; Feedback Stabilization of Linear Diffusion Systems. SIAM J. Cont. Optim., vol. 21, pp. 667-676 (1983)

[5] ———; Feedback Control of Second Order Evolution Equations with Damping. SIAM J. Cont. Optim., vol. 22, pp. 343-361 (1984)

[6] Schumacher, J. M.; A Direct Approach to Compensator Design for Distributed Parameter Systems. SIAM J. Cont. Optim., vol. 21, pp. 823-836 (1983)

[7] Curtain, R. F. and Salamon, D.; Finite Dimensional Compensators for Infinite Dimensional Systems with Unbounded Input Operators. SIAM J. Cont.Optim., vol. 24, pp. 797-816 (1986)

[8] 示村悦二郎，内田健康，児島晃；むだ時間を含む系に対する有限次元補償器の設計，計測自動制御学会論文集，vol.25，pp.818-820 (1989)

[9] 日當明男；無限次元システムの安定化制御について，第12回 Dynamical System Theory シンポジウム　予稿集，pp.185-188 (1989)

[10] 宮寺功；関数解析．理工学社 (1980)

[11] 村上温夫；関数解析．朝倉書店 (1980)

[12] 田辺広城；関数解析　上，実教出版 (1978)

[13] 坂和愛幸；線形システム制御論．朝倉書店 (1979)

[14] 計測自動制御学会編；自動制御ハンドブック基礎編．オーム社 (1983)

[15] 森口繁一，宇田川銈久，一松信；数学公式II．岩波書店 (1987)

[16] Kato, T.; Perturbation Theory for Linear Operators. Springer (1984)

[17] Pazy, A.; Semigroups of Linear Oerators and Applications to Partial Differential Equations. Springer (1983)

[18] Yoshida, K.; Functional Analysis. Springer (1980)

[19] Hille, E. and Phillips, R. S.; Functional Analysis and Semi-Groups. AMS (1957)