

【工学】

研究論文

パワーフローを目的関数とする SEA サブシステムの
構造最適化に関する研究黒田 勝彦^{*1}A Study on Structural Optimization of SEA Subsystems assumed to be
Power Flow as Objective Function

KURODA Katsuhiko

Summary

This paper describes a structural optimization method for subsystems in statistical energy analysis (SEA). The objective function is power flow (PF), which shows the power flow between the subsystems. Under the constraint function that is the total mass, the design variable is taken as the thickness of each subsystem in the case of analytical SEA in commercial SEA software VA One. The proposed method is based on a combination of SEA and FEM calculation, calculating repeatedly until satisfying the value of objective functions under arbitrary constraints. A result of applying the proposed method to a simple structure consisting of two flat plates connected in an L-shaped configuration is given. The validity of the optimal thickness distribution by proposed method were verified by comparison of subsystem energy, input power, natural frequency and coupling loss factor before and after optimization.

Keywords : (Statistical Energy Analysis, Shape Design, Structural Analysis, FEM, Vibration of Continuous System, Forced Vibration)

1. はじめに

現在自動車産業においては、燃費向上のため車体の軽量化が求められ、高剛性の薄板が使用されることにより、高周波数までの振動騒音解析が求められている。機械の低振動・低騒音を実現するために、従来の固有振動数や周波数応答関数（以下 FRF）を目的関数とした最適化手法に対して⁽¹⁾、著者らによって、統計的エネルギー解析法（Statistical Energy Analysis; 以下 SEA）⁽²⁾を用いた構造

要素間のエネルギー流れに着目し、結合損失率（Coupling Loss Factor; 以下 CLF）を目的関数とした構造最適化が提案された⁽³⁾。一般的に、FRF のピーク値を目的関数とした従来法は、離散周波数の振動ピークに注目しているため、複数の固有振動数が含まれる場合など目的関数の設定が容易ではないが、多モード系に対する振動音響解析手法である SEA は、対象系を要素の集合体とみなし、要素間のパワー平衡に注目する手法であり、要

^{*1} 工学部 機械工学科 教授
2016年3月23日受付
2016年6月3日受理

素間のエネルギー流れを SEA パラメータである結合損失率で示し、結合損失率を目的関数に設定することでエネルギー流れに着目した構造最適化が実現しやすいと考えられる。さらに、SEA は空間と周波数で平均する手法であるため、目的関数を従来法に比較して少なくすることが可能であり、また従来法の局所的に最適化された結果に対して、要素の空間平均を対象とするため大局的な最適化結果が得られ、実際の板厚変更などに適用しやすい最適化が行われる傾向にあることが示された⁽³⁾。

これまで著者らは、実験 SEA をベースとした固体音低減プロセスを提案し⁽⁴⁾、各種機器に適用し有効性を検証してきた。このプロセスは、対象全系から固体音を低減するために有効な箇所、すなわち変更すべき SEA パラメータ（内部損失率や結合損失率）の特定を目指したものである。これまでは、特定された結合損失率の値を変更させるためには、解析 SEA で使用される結合損失率の評価式⁽⁵⁾を用いて部材構造の変更案を検討してきた。しかし解析 SEA の算出式では具体的な構造変更案は導かれず、また要素の詳細形状が把握できないため、構造物の詳細検討は不可能であった⁽⁶⁾。そこで著者らは、具体的な構造検討が可能な FEM モデルを用いた SEA 要素形状の適正化手法の開発を目指し、これまでに対象系全体ではなく注目した部分構造のみを対象とした FEM モデルを用いて、結合損失率を評価する手法（FEM-SEA）を検討してきた⁽⁷⁾。FEM モデルを用いることにより、FEM でしか解析できないような複雑な構造物（例えば凹凸や曲率付加のある一様でない構造物や連続でない穴の開いた構造物）を詳細に検討することが可能である。

SEA の構造最適化問題への適用について、解析 SEA を用いて車内音圧の低減を目的に、各 SEA 要素の板厚と内部損失率を設計変数にして検討した例⁽⁸⁾や、各損失率を設計変数にして検討した例⁽⁹⁾がみられる。またエネルギー有限要素法という手法も近年確立されてきており、船体の居室内振動の低減を目的に、グループ分けされた要素の損失係数を設計変数にして検討した例⁽¹⁰⁾がみられる。しかし、要素の具体的な構造については検討されていない。

以上の背景の下、本報では、SEA サブシステムの構造最適化に関する詳細検討を目的として単一の帯域のパワーフローを目的関数に、SEA パラメータを理論評価式により評価し机上で応答予測を行う解析 SEA による板厚を設計変数とした検討及び著者らが提案した構造適正化法

によるサブシステムの各 FE 要素の板厚を設計変数とした検討を行い、構造適正化法で得られた結果の有効性を検証する。

2. SEA 基礎理論

2.1 SEA モデルの構築 SEA は、対象系（system）を要素（subsystem）の集合体とみなし、要素間のパワー平衡に着目する。r 要素からなる系の SEA 基礎式は、次式で表される⁽²⁾。

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{E} \quad (1)$$

$$\mathbf{L} = \omega \begin{pmatrix} \eta_{1,1} + \sum_{i=1}^r \eta_{1,i} & -\eta_{2,1} & \cdots & -\eta_{r,1} \\ -\eta_{1,2} & \eta_{2,2} + \sum_{i=2}^r \eta_{2,i} & \cdots & -\eta_{r,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1,r} & -\eta_{2,r} & \cdots & \eta_{r,r} + \sum_{i=r}^r \eta_{r,i} \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 ω は中心角振動数、 \mathbf{E} は要素エネルギーベクトル、 \mathbf{P} は入力パワーベクトルである。損失率マトリクス \mathbf{L} は、内部損失率 $\eta_{i,i}$ （Internal Loss Factor; 以下 ILF）と結合損失率 $\eta_{i,j}$ （Coupling Loss Factor; 以下 CLF）を成分とする。ILF と CLF を評価し、損失率マトリクス \mathbf{L} を生成することを SEA モデルの構築と称す。

著者らの提案する固体音低減プロセスによれば⁽⁴⁾、プロセス手順は、①SEA モデルの構築、②実稼動時の入力同定及び伝搬経路の解明、③変更すべき損失率の抽出、④構造変更案の検討、であり、SEA パラメータとしては、入力パワー、要素エネルギー、内部損失率、結合損失率、パワーフロー等があるが、本報では SEA サブシステムの構造最適化について、1 要素系の SEA パラメータであり、材料の構造減衰や減衰効果をもたらす制振材や遮音材の減衰性能に依存する内部損失率は検討対象とせず、2 要素系の SEA パラメータで要素間のエネルギー流れを表し以下で示すパワーフロー（power flow; 以下 PF）を検討対象とする。

$$PF_{1,2} = \omega(\eta_{1,2}E_1 - \eta_{2,1}E_2) \quad (3)$$

固体音低減プロセスに従えば PF は、式(3)より実稼動時の要素エネルギーを計測し算出することになるが、本報

では、モデル構築の要素 1 加振時の各要素エネルギーを式(3)のそれぞれの要素エネルギーとして、PF を定義する。そして、部分構造の PF に注目することで、例えば自動車や電車等車内音場を有する構造物において、振動入力要素から車内音場に関係のある要素間のエネルギー流れを下げることにより、車内音場の音圧を下げることに効果があると考えられる。

2.2 解析 SEA ベースの SEA サブシステムの構造最適化

解析 SEA とは、必要な SEA パラメータを理論評価式により評価し机上で応答予測ができるようにしたものであり、本報では、汎用 SEA ソフトウェアである VA One 2014 の解析 SEA の機能を使用する。

2.3 FEM ベースの SEA サブシステムの構造最適化

著者らによれば、実験 SEA ベースで対象全系から固体音を低減するために有効な箇所、すなわち変更すべき SEA パラメータ（内部損失率や結合損失率）の特定を目指した固体音低減プロセスにおいて、注目した部分構造のみを対象とした FEM モデルを用いて、結合損失率を評価する手法（FEM-SEA）が提案された⁷⁾。さらに、SEA 要素形状の詳細検討を目的として構造最適化を組み込んだ構造適正化手法が提案されている⁸⁾。FEM による SEA ベースの構造最適化における設計変数としては、構造に関して、要素の構造減衰や要素間の結合形態（ばね定数等）が考えられる。

2.4 SEA パラメータ最適化問題の定式化

SEA 要素形状を決定する最適化問題の定式化は、従来から検討されてきた構造形状の最適化問題と同様に扱う。本研究での目的関数は SEA パラメータの要素間のパワーの流れを表す指標の PF であり、それらを最大化、最小化または目標値に設定するための構造形状を有限要素法などの数値的解法により生成させる。ここでは、目的関数を任意の周波数帯域の PF とし、パワーが流れにくくなることを想定し、PF を最小にする場合を例に定式化を行う。

設計領域 D において、制約関数 $g(\{x_j\})$ の制約のもと、周波数帯域 i における目的関数 $PF_i(\{x_j\})$ を最小化する場合、以下のようなになる。

$$\text{Minimize } \sum_i (PF_i(\{x_j\})) \tag{4a}$$

$$\text{Subject to } g(\{x_j\}) - g_{\max} \leq 0 \tag{4b}$$

$$\{x_j\}^L \leq \{x_j\} \leq \{x_j\}^U \quad (j=1, \dots, n) \tag{4c}$$

ここで、 g_{\max} は $g(\{x_j\})$ の上限値である。

3. L 型構造への適用

3.1 対象構造物と問題設定

SEA サブシステムの構造最適化に関する検討としては、図 1 で示す 2 枚の薄板で構成される簡易な平板構造物を対象とする。基準となる構造物の材質は鋼製（密度 7860 kg/m^3 、縦弾性係数 $2.11 \times 10^{11} \text{ Pa}$ 、ポアソン比 0.3）で、形状は各平板ともに一辺の長さが 0.3 m の正方形で、各平板の板厚は 1 mm で、損失係数は全モード一律に 5% とする。図中のマーカー (○) は、3.4 節の FEM ベースの各要素の最適化結果の表示で使用する。構造最適化の問題設定においては、設計変数を一般的に平板やシェル要素の最適化問題で取り扱われる要素の板厚とする。制約条件は、実機の構造適正化の場合には、設計条件に応じて最大応力や最大変位等を考慮するが、本報では構造適正化手法の検証を主目的としているため、構造物の総質量及び設計変数である板厚に上下限の制約を設けた。構造最適化の目標として単一の帯域の要素 1 から要素 2 へのエネルギーの流れを小さくすると考えられる PF の最小化を目指すこととした。

3.2 解析 SEA ベースによる SEA サブシステムの板厚をパラメータとした構造最適化

SEA サブシステムの板厚を設計変数とした場合、量販している製品の板厚を考慮し、上限と下限の値をそれぞれ、0.6 mm、2.0 mm と設定すると表 1 で示すように異なる 9 個の組み合わせが検討できる。この際検討した材質は、上述した鋼である。表 1 に示す 9 個の組み合わせを VA One で作成し、2.1 節で定義した PF をそれぞれ 20 Hz から 800 Hz までの 1/3 オクターブ帯域周波数で算出した。表 1 の PF の値は、要素

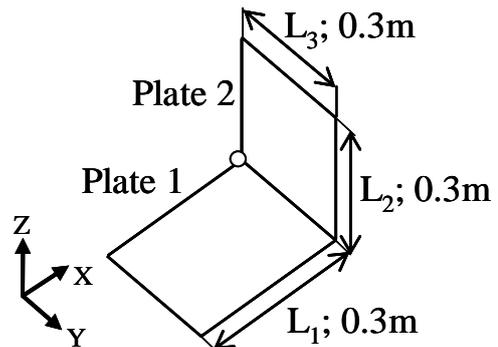


Fig.1 Test plate.

Table 1 Initial examination of the objective function using analytical SEA in the 125 Hz band by difference condition for the plate thickness.

	Subsystem1 [m]	Subsystem2 [m]	$PF_{1,2}$ [W]	Total mass [kg]
1	0.001	0.001	2.64×10^{-1}	1.42
2	0.001	0.0006	2.57×10^{-1}	1.13
3	0.001	0.002	1.37×10^{-1}	2.12
4	0.0006	0.001	1.54×10^{-1}	1.13
5	0.0006	0.0006	2.37×10^{-1}	0.85
6	0.0006	0.002	4.33×10^{-2}	1.84
7	0.002	0.001	2.73×10^{-1}	2.12
8	0.002	0.0006	1.44×10^{-1}	1.84
9	0.002	0.002	2.96×10^{-1}	2.83

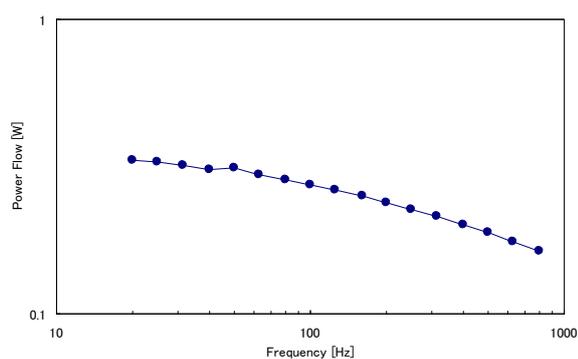


Fig.2 Example results for power flow in case of initial condition using analytical SEA

Table 2 Comparison between the initial and optimum values using analytical SEA in the 125 Hz band.

	Initial value	Optimum value
$\eta_{1,2}$	3.18×10^{-2}	1.40×10^{-2}
$\eta_{2,1}$	3.18×10^{-2}	2.33×10^{-2}
E_1^i (J)	1.80×10^{-2}	2.12×10^{-2}
E_2^i (J)	7.45×10^{-3}	4.30×10^{-3}
P_I (W)	1	1

1 ～ 1W の入力があるときの次節で目的関数とした帯域である 125 Hz の結果である。解析 SEA の特徴として図 2 で示すように線形の応答結果となり、周波数の増加に伴い減少する結果となる。表 1 より、6 番目の条件で、最小値 4.33×10^{-2} が得られている。制約条件である総質量を考慮すると、2, 4 と 5 番目を除いて総質量は増加しており、4 番目の条件において PF は最小の結果が得られ、初期値 (2.64×10^{-1}) に対し 1.54×10^{-1} に減少し、初期値の約 60 % の値である。また表 2 に 125 Hz 帯域の初期値と 4 番目の条件における、各 SEA パラメータ結果 (CLF, 要素の

応答エネルギー, 入力パワー)を示す。ここで、 E_i^j は要素 j を P_j の入力パワーで加振したときの要素 i の応答エネルギーを表わす。また表 2 より、式(3)の PF と関連のあるパラメータを検討すると、CLF と要素 2 のエネルギーは減少し、要素 1 のエネルギーは増加している。これらの結果より、要素 2 の要素エネルギーが減少していることから、要素 2 から音場への影響が大きい、すなわち要素 2 からの音響放射効率の高い対象構造に有効な最適結果が得られたと考えられる。

3.3 SEA サブシステムの各 FE 要素の板厚をパラメータとした検討 著者らによれば、所望の SEA パラメータの値を実現するために SEA サブシステムの要素形状の適正化が提案されている⁽³⁾。その特徴は、FEM を援用する SEA をベースとしており、任意の制約条件の下、適正解を満たすまで繰り返し演算を行うことである。モデルの作成には、汎用有限要素解析ソフトウェア ANSYS Ver.11.0 (要素タイプは弾性シェル要素 shell63) を使用し、SEA パラメータの算出には MATLAB を、構造最適化には、CAE プロセスの自動化と統合化及び最適化が可能な OPTIMUS10.9 を使用する。要素サイズは、1k Hz の曲げ波長に 5 節点が含まれるように $0.03\text{m} \times 0.03\text{m}$ すると、節点数は 231, 要素数は 200 となる。本来 SEA を実機構造物へ適用する場合には、例えば周波数帯域内のモード数や MOF の値によって、SEA が適用可能か否かの判別を行うことになるが、本報では適正化法の PF への適用を優先し、これらの閾値については考慮していない。

3.3.1 単一の帯域の構造最適化 本項ではまず対象周波数範囲の PF の値を算出したのち、最適化する帯域を決定することとした。その際、rain-on-the-roof 加振⁽⁴⁾を模擬するが、1 要素あたりランダムに選択した 27 節点を個

別に加振力 1N で点加振することとし、固有モードの採用数は、0 から 1k Hz までの計 44 個、SEA パラメータの計算に必要な入力パワーと要素エネルギーは、応答変位を 5 Hz から 900 Hz まで 5 Hz 刻みで算出したのち、SEA パラメータの計算は、20 Hz から 800 Hz までの 1/3 オクターブ帯域周波数特性を算出した。図 3 に PF の結果を示す。図 3 の 50 Hz と 250 Hz 帯域においては、負の値を示しているためプロットされていないが、どちらの帯域も CLF が負の値を示した結果、PF が負の値を示している。CLF が負の値となった原因については、今後の検討課題とする。図 3 より、目的関数は、対象周波数範囲で最大値(1.19×10⁰)を示した 125 Hz 帯域とした。

そして、PF の最小化を目指した繰り返し計算を行うにあたっては、以下の条件で検討した。設計変数は、一般的にシェル要素の最適化問題で取り扱われる要素の板厚とし、対象要素は板 1 及び板 2 とする。よって上述した FE 要素数から設計変数の総数は、200 個となる。なお本対象の境界は、周辺部のみ単純支持拘束とした。また制

約条件として、CLF の値は 0 以上 1 以下、総質量は初期値(1.42 kg)以下、板厚の上限と下限の値はそれぞれ、0.6 mm, 2.0 mm に設定し変動できるようにした。

$$\text{Minimize} \left(PF_{125\text{Hz}} \left(\{x_j\} \right) \right) \tag{5a}$$

$$\text{Subject to total mass} \leq 1.42 \tag{5b}$$

$$0 \leq CLF_{125\text{Hz}} \leq 1 \tag{5c}$$

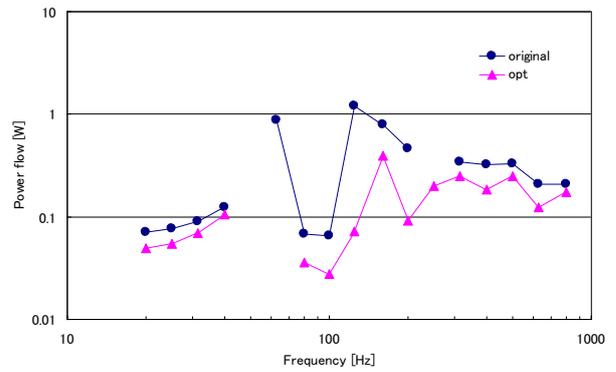


Fig.5 Comparison between the initial values and optimum values of the power flow.

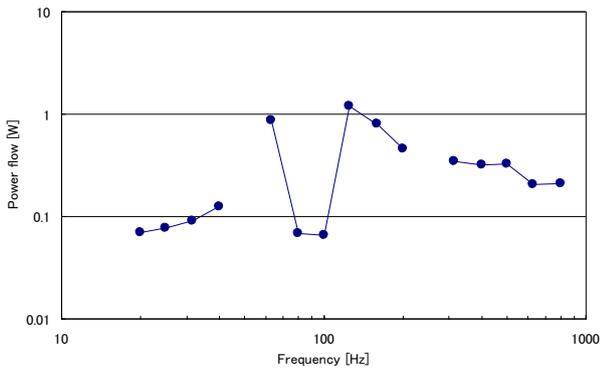


Fig.3 Initial values for the power flow from subsystem 1 to subsystem 2 using proposed method.

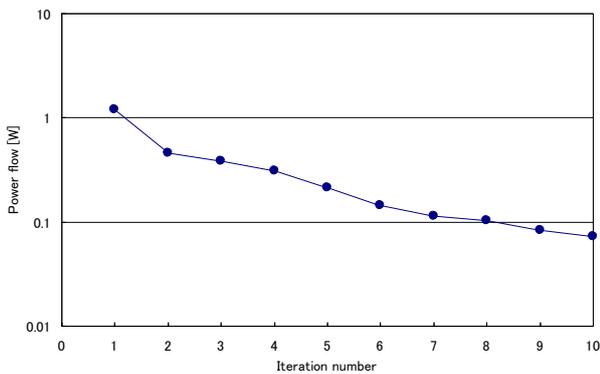
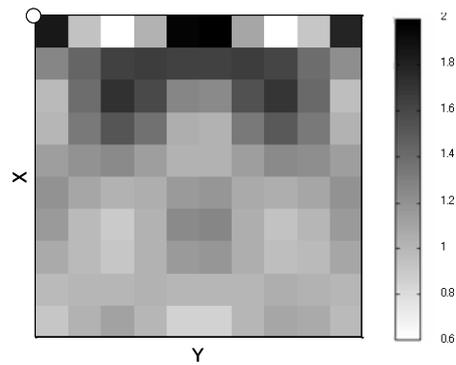
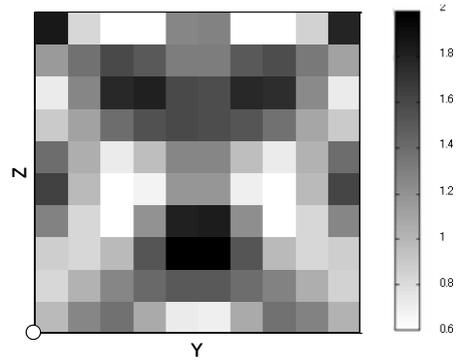


Fig.4 Iteration history for the objective function in the 125 Hz band using proposed method.



(a) Plate 1



(b) Plate 2

Fig.6 Optimal thickness distribution.

Table 3 Comparison between the initial and optimum values in the 125 Hz band.

	Initial value	Optimum value
$\eta_{1,1}$	4.25×10^{-2}	4.17×10^{-2}
$\eta_{1,2}$	9.55×10^{-2}	3.95×10^{-3}
$\eta_{2,1}$	9.55×10^{-2}	8.47×10^{-3}
$\eta_{2,2}$	4.25×10^{-2}	3.81×10^{-2}
E_1^I (J)	2.27×10^{-2}	2.81×10^{-2}
E_2^I (J)	6.76×10^{-3}	2.19×10^{-3}
P_I (W)	7.69×10^{-3}	1.08×10^{-2}

Table 4 Comparison between the initial and optimum values of the natural frequencies. (unit: Hz)

Order	Initial value	Optimum value
1	54.6	53.0
2	65.3	62.3
3	136.1	132.4
4	136.1	134.8
5	142.4	138.9
6	161.6	165.4
7	216.6	220.2
8	235.7	232.9
9	271.9	264.0
10	271.9	272.5

$$0.0006 \leq \{x_j\} \leq 0.002 \quad (5d)$$

OPTIMUS のソフトウェア上では最適化アルゴリズムが選択でき、本報では、一般的な非線形計画問題に対して現在最も有効とされている局所的最適化手法である逐次 2 次計画法(NLPQL 法)を用いた。なお繰り返し回数は、最適解を得るのに計算時間がかかるため、10 回で打ち切った。図 4 に最適化の過程で得られた反復数と最適化の目標である $PF_{1,2}$ の推移結果を示す。また図 5 に PF の初期値と最適化結果の比較を示す。なお最適化結果とは、10 回の反復計算から最小値となる 10 回目の反復で得られた結果である。

図 4 より反復 1 回で、 $PF_{1,2}$ が初期値の 40% 程度まで減少していることが分かる。最適化結果は、初期値(1.19×10^0) に対し 7.25×10^{-2} に減少し、初期値の約 6% の値となった。また図 5 より、対象としている全ての周波数帯域で初期値に比べて小さな値となっており、今回の構造最適化に

おいては、125 Hz 帯域のみを目的関数としたが、全ての帯域に有効な構造最適化が実現できたと言える。著者らのこれまでの単一の帯域の CLF を目的関数とした研究によれば⁹⁾、全ての帯域に有効な構造最適化は実現できず、トレードオフの関係が見られた。よって PF を目的関数にすることで、ロバスト性の高い構造が得られる可能性がある。

3.4 最適化結果の検証 最適化後の各板要素の板厚変化を図 6 のコンター図(板厚 0.0006m を最大輝度の白色)によって示す。図中に示されたマーカー(○)は、図 1 で示した位置に対応している。さらに表 2 と同様、着目した周波数帯域における、初期値と最適化後の各 SEA パラメータ結果を表 3 に示す。また、表 4 に図 1 で示す 2 要素系の初期値と適正化後の 10 次までの固有振動数の比較を示す。図 6 より、板 1 と板 2 の板厚分布はそれぞれ x 軸と z 軸を対称軸とする線対称の構造が生成され、板厚が薄いところは薄く、厚いところは厚い形状となっている。最適化結果の各 SEA 要素の質量は、要素 1 が初期値の 0.71 kg から 0.70 kg、要素 2 は初期値の 0.71 kg と同じであった。また前節と同様、式(3)の PF と関連のあるパラメータを表 3 より検討すると、CLF、要素 2 のエネルギーは減少し、要素 1 のエネルギーは増加している。この傾向は表 2 の解析 SEA で得られた結果と類似し、さらにパワー比($\omega \eta_{2,1} E_2^I / \omega \eta_{1,2} E_1^I$)を計算すると、初期値の約 30% から最適結果の約 17% へと減少していることにより、PF が小さくなったと言える。また表 4 より、今回着目している周波数帯域である 125 Hz(112 Hz から 141 Hz)には、初期値では 3 次と 4 次の固有振動数が影響していたが、最適化後では 3 次と 4 次に加え 5 次の固有振動数が追加されている。しかし、初期のモード形状と大きな変更は見られず、質量の変化も見られないことより、固有振動数の減少を伴う 5 次程度までの剛性を下げる形状が生成されたと考えられる。

4. おわりに

本報は、SEA サブシステムの構造最適化に関する詳細検討を目的として、単一の帯域の PF を目的関数に、解析 SEA によるサブシステムの板厚を設計変数とした検討及び著者らが提案した構造適正化法によるサブシステムの各要素の板厚を設計変数とした検討を行った。

その結果、解析 SEA ベースでサブシステムの板厚を設計変数とする場合、制約条件を満たした上で応答要素のエネルギーが小さくなることを示し、応答要素から音場への影響が大きい構造物に有効な最適化である可能性を得た。さらに、単一の帯域の PF を目的関数に、サブシステムの各要素の板厚を設計変数とした検討を行った結果、板厚の分布は異なるが解析 SEA で示した結果の傾向が得られ、さらに単一の帯域を目的関数としたにも関わらず、全ての帯域で PF の最小化を実現することができた。

今後は、本手法の更なる有効性を検討するため、①複数の周波数帯域の目的関数を同時に適正化すること、②適正化法の高速化、③実際の構造に即した設計変数を対象とすること、④振動低減や音圧低減を目指した実機構造物への適用、が必要であると考えている。

謝辞

本研究の一部は、公益財団法人スズキ財団の科学技術研究助成及び公益財団法人 JKA の競輪*の補助 (27-153) を受けたものであり、ここに謝意を表する。

参考文献

- (1) 古屋耕平, 吉村卓也, 須藤晶, 成國星哉 : 振動音響連成系の音圧最小化問題に対する最適性の考察とそれに基づく構造最適化 : 第2報, 固有振動数における音圧の低減を図る場合, 日本機械学会論文集C編, Vol. 73, No.731 (2007), pp.2080-2087.
- (2) R. H. Lyon : Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Application, MIT Press, (1975).
- (3) 黒田勝彦, 山崎徹, 鞍谷文保 : 所望のSEAパラメータを実現する要素形状の適正化, 日本機械学会論文集C編, Vol. 79, No.799 (2013), pp.1012-1023.
- (4) 山崎徹, 黒田勝彦, 森厚夫 : SEAによる機械製品の固体音低減プロセス, 日本機械学会論文集C編, Vol. 73, No.726 (2007), pp.446-452.
- (5) M. Norton, and D. Karczub : Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers, Cambridge 2nd edition, pp. 417-418.
- (6) 山崎徹, 黒田勝彦 : 固体音解析における解析SEAパラメータのFEMによる検証, 日本機械学会論文集C編, Vol. 74, No.744 (2008), pp.1963-1970.
- (7) 山崎徹, 黒田勝彦, 鎌田実 : 部分構造を対象としたFEMによるSEAパラメータの評価 (FEM-SEAの提案), 日本機械学会論文集C編, Vol. 74, No.747 (2008), pp.2655-2661.
- (8) C. Aran and M. Dhanesh : Optimum Design of Vibro-acoustic Systems using SEA, International Journal of Acoustics and Vibration, Vol. 13, No.2, 2008, pp. 67-72.
- (9) T. Bartosch and T. Eggner : Engine noise potential analysis for trimmed body: Optimisation using an analysis sea gradient computation technique, Journal of Sound and Vibration, 300, 2007, pp. 1-12.
- (10) G. A. Borlase and N. Vlahopoulos : An energy finite element optimization process for reducing high-frequency vibratoin in large-scale structures, Finite Elements in Analysis and Design, 36, (2000), pp. 51-67.
- (11) B. R. Mace and P. J. Shorter, Energy Flow Models from Finite Element Analysis, Journal of Sound and Vibration, 233, (2000), pp. 369-389.