### 【工学】

### 研究論文

# SEA による振動入力パワーの変動を考慮した

# 振動と音圧予測に関する研究

黒田 勝彦\*1

## A Study on Prediction of Vibration and Sound Pressure Response for SEA

# Considering Variation of Vibration Input Power

### KURODA Katsuhiko

### Summary

The authors developed the structural design process on the basis of experimental SEA for reducing structure-borne sound. However, it was difficult to predict the sound pressure accurately in order not to predict the variation of vibration input power by structural modification. There are four steps in the process, at the third steps, the process identifies the internal loss factors (ILFs) or the coupling loss factors (CLFs) which should be changed in order to reduce the noise radiated from the machinery using sensitivity analysis to the squared sound pressure at the evaluation point. The sensitivity analysis is based on the perturbation method, the squared sound pressure or the vibration energy are evaluated regarding the variation of respective loss factors and input power. For two SEA models are used with and without predicted vibration input power by structural modification, parameter study are implemented by analytical SEA. As a result, it can be seen that sound energy values for the SEA model without using the predicted vibration input power for structural modification by a partial thickness change are overestimated for a flat plate. The same phenomenon for L shaped plate was also confirmed by the experimental test.

Keywords: (Statistical Energy Analysis, FEM, Vibration of Continuous System, Forced Vibration)

### 1. はじめに

現在自動車産業において,燃費規制が厳しくなり燃費 向上のため車体の軽量化が求められ,高剛性の薄い鋼板 が部分的に使用されることで複雑な構造形態となり,高 周波数までの振動騒音解析が求められている.また,駆 動にモータを利用する EV, HV や PHV の車では内燃機 関の車に対して常時比較的静かであることが求められ, 高周波数までの振動騒音対策が不可欠となっている.可 聴周波数域の振動・騒音問題を解決する手法の一つに, 統計的エネルギー解析法(Statistical Energy Analysis;以下 SEA) <sup>(1)</sup>がある.SEA は、対象系を要素の集合体とみな し、要素間のパワー平衡に注目する手法である.SEA モ デルの構築方法に着目すると、設計の上流段階では半無 限構造物の波動伝搬理論をベースに導出された解析 SEA<sup>(2), (3)</sup>が有効であろう.また、形状の図面データが存 在するならば FEM を用いた SEA<sup>(4), (5)</sup> (FEM 上で実験 SEA モデルを構築すること)が有効であり、実機が存在 するならば、実験 SEA<sup>(2), (0)</sup>が有効であると思われる.

これまでに著者らによって、全周波数域での振動騒音 解析を実現することや解析精度の向上を目的として、そ れぞれのモードの判別のしにくい中・高周波数で利用さ れる SEA とモードの判別の容易な低周波数域で利用され る伝達経路解析法(transfer path analysis;以下 TPA) に関 する比較が行われている<sup>(7)</sup>. そこでは, SEA の評価次元 であるパワーに着目し, 振動源の同定と振動源から評価 点または評価要素における伝達寄与の比較が提案されて いる.また,著者らによって SEA による固体音低減プロ セスが提案され(8),各種機器に適用しその有効性が検証 された.このプロセスは、対象全系から固体音を低減す るために有効な箇所である SEA パラメータ(内部損失率 や結合損失率)の特定を目指したものであり、プロセス の構造変更案の検討においては、解析 SEA をベースとし た検討例<sup>(8)</sup>や有限要素法 (Finite Element Method; 以下 FEM) による実験 SEA をベースとした検討例<sup>の</sup>がある. しかし、どちらの検討例においても、構造変更前後の振 動入力パワーが変動することで、精度のよい音場の応答 予測は難しい.

以上の背景の下,本研究では,文献(8)で提案された SEA による摂動法を用いた振動エネルギーと二乗音圧応 答予測手法に対して,構造変更による振動入力パワーの 変動を考慮した場合としない場合での影響を明らかにす ることを目的に,1 枚平板では,FEM による振動解析, BEM による音響解析結果と実験ベースで検討し,L型平 板では部分的に構造変更を施した対象構造へ実験ベース により検討する.

# 2. SEA モデル構築の基礎理論と構造変更によ る振動入力パワーと放射パワー変動の基礎検 討

**2.1 SEA 基礎式** SEA は,対象系 (system)を要素 (subsystem)の集合体とみなし,要素間のパワー平衡に

着目する. r 要素からなる系の SEA 基礎式は, 次式で表 される<sup>(1)</sup>.

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{E}$$
(1)  
$$\mathbf{L} = \omega \begin{pmatrix} \eta_{1,1} + \sum_{i\neq 1}^{r} \eta_{1,i} & -\eta_{2,1} & \cdots & -\eta_{r,1} \\ -\eta_{1,2} & \eta_{2,2} + \sum_{i\neq 2}^{r} \eta_{2,i} & \cdots & -\eta_{r,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\eta_{1,r} & -\eta_{2,r} & \eta_{r,r} + \sum_{i\neq r}^{r} \eta_{r,i} \end{pmatrix}$$
(2)

ここで, oは中心角振動数, E は要素エネルギーベクト ル, **P** は入力パワーベクトルである. 損失率マトリクス L は, 内部損失率 $\eta_{i,i}$  (Internal Loss Factor; 以下 ILF) と結 合損失率*η<sub>i,j</sub>*(Coupling Loss Factor;以下 CLF)を成分とす る. ILF と CLF を評価し、損失率マトリクス L を生成す ることを SEA モデルの構築と称す. SEA を用いて精度良 くモデルを作成し解析を行うには、SEA モデルの構築を いかに精度良く行うかが重要である.実験で損失率を求 める方法として,パワー注入法<sup>(10)</sup> (power injection method; 以下 PIM) がある. PIM は, 結合状態のままの 各要素に個別に既知のパワーを注入しそれぞれの要素の エネルギー状態を計測し ILF および CLF を算出する.し かし、PIM を用いて算出した場合、負の損失率が見られ ることが多いため、結合損失率が正値となる近似的パワ 一注入法(11) (approximated power injection method; 以下 APIM) により損失率を算出した. ILF および CLF は,式 (3), (4)より算出される.

$$\eta_{i,j} = \frac{E_{ij}/P_i}{\omega E_{ii}/P_i \times E_{jj}/P_j}$$
(3)

$$\eta_{i,i} = \frac{1 - \omega \sum_{j \neq i}^{n} \left( \eta_{ij} E_{ii} / P_i - \eta_{ji} E_{ij} / P_i \right)}{\omega E_{ii} / P_i} \tag{4}$$

ここで, *E<sub>ij</sub>* は要素 *i* 加振時の要素 *j* の要素エネルギー, *P<sub>i</sub>*は要素 *i* 加振時の入力パワーである.構造要素 *i* の入力 パワーと要素エネルギーおよび音場要素 *i* の要素エネル ギーは,それぞれ式(5), (6), (7)より算出される.

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ F_i v_{ik}^* \right] \tag{5}$$

$$E_{ii} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ m_i v_{ik} v_{ik}^* \right]$$
(6)



(a) Structural input power.



(b) Radiated power.

Fig.1 Influence of structural input power and radiated power at 100 Hz by difference condition based on wave analysis.

$$E_{ii} = \frac{V_i p_i^2}{\rho_o c^2} \tag{7}$$

ここで、Re[]は実数部、 $F_i$ は加振点 i の入力の力、\*は 複素共役である. $m_i$ は要素 i の質量、 $v_{ik}(k=1\sim n)$ は要素 iの応答点 k における速度応答スペクトル、 $V_i$ は要素 i の体 積 (本研究では、体積が不明であるため 1 m<sup>3</sup> とする)、  $p_i$ は要素 i における音圧応答スペクトル、 $\rho_o$ は空気密度で 1.2 kg/m<sup>3</sup>、c は音速で 343.5 m/s とした.

2.2 **摂動法による振動と音エネルギーの予測** 文献 (8) で提案された摂動法を用いた振動要素のエネルギー 感度と変動量Δ*E*は,損失率と入力パワーの変動係数*α<sub>n</sub>*に 関して,以下の式で示される.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \alpha_n} = \overline{\mathbf{L}}^{-1} \left( -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \alpha_n} \overline{\mathbf{E}} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \alpha_n} \right)$$
(8)

$$\Delta E = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \alpha_n} \alpha_n \tag{9}$$

ここで、上付き棒は変動させないときの値を示す.更に、 音場への応答予測では、次式で示す構造場から音場への 影響係数βiを式(8)に乗ずることにより音圧評価点におけ る二乗音圧感度が求められる.

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} & \cdots \\ E_{12} & E_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$
(10)

2.3 波動理論による振動入力パワーと音響放射パワーの関係 文献(12)に基づき,平板が角振動数ωで定常 振動しているときの振動エネルギーを *Ep*,全消散パワーを *W*<sub>dis</sub>,音として空気中に放射される音響放射パワーを *W*<sub>rad</sub>,および平板内部で消散されるパワーを *W*<sub>int</sub> とする と,それぞれの損失率を用いて次のように表される.

$$W_{dis} = \omega \eta_{dis} (\omega) E_p$$

$$W_{rad} = \omega \eta_{rad} (\omega) E_p$$

$$W_{int} = \omega \eta_{int} (\omega) E_p$$

$$W_{dis} = W_{rad} + W_{int}$$
(11)

ここで、 $\eta_{dis}(\omega)$ は、全損失率、 $\eta_{rad}(\omega)$ は、放射損失率、 $\eta_{int}(\omega)$ は、内部損失率である.

平板が定常振動している場合,エネルギー保存則が成立 し,全消散パワーを $W_{dis}$ は平板への入力パワー $W_{in}$ に等し い.そして,振動エネルギー $E_p$ は,曲げ波数 $k_B$ ,曲げ波 速度 $c_B$ ,二乗振動速度 $v^2$ から以下の式で示される<sup>(13)</sup>.

$$k_{B} = \frac{\omega}{c_{B}}$$

$$c_{B} = \omega^{0.5} \times \left(\frac{Et^{3}}{12(1-\bar{v}^{2}) \times \rho t}\right)^{0.25}$$

$$v^{2} = \frac{F^{2}k_{B}^{2}}{8\omega^{2}\bar{m}^{2}S\eta_{int}}$$

$$E_{p} = mv^{2}$$
(12)

ここで, *F*, *E*, *t*,  $\bar{v}$ ,  $\rho$ ,  $\bar{m}$ , *m*, *S* は, それぞれ, 加 振力, ヤング率, 板厚, ポアソン比, 密度, 面密度, 質 量, 片面の表面積である. 一方, 音響放射パワー $W_{rad}$  は, 以下の式から算出される.

$$W_{rad} = \sigma \rho_o c S v^2$$

$$\sigma = \frac{a+b}{\pi \mu k_a a b (\mu^2 - 1)^{0.5}} \left\{ \ln \left( \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \right) + \frac{2\mu}{\mu^2 - 1} \right\}, \mu > 1$$
(13)
$$\mu = \frac{k_b}{k_a}$$

$$k_a = \frac{\omega}{c}$$

$$k_b = \frac{\omega}{c_B}$$
ここで,  $\sigma$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $k_a$  は, 音響放射効率<sup>(14)</sup>, 対象の辺



Fig.2 Test plate 1, including excitation (arrow), response (blue circles), and evaluation (hat) locations of subsystem.





(b) Structural input power.

Fig.3 Influence of structural modification by numerical analysis.

#### 長,音場の波数である.

次章で示す鋼製の1枚平板(幅0.6 m,高さ0.3 m)で, 損失率,板厚,ヤング率を構造変更のパラメータとし, デフォルト値として,それぞれ,0.5%,1.6 mm,2.1× 10<sup>11</sup> Paとし,デフォルト値に対して,-90%から100%の 10%刻みの間でデフォルト値を含む20水準,加振は単位 入力(1 N)とした場合,式(11)から(13)を用いて算出し た100 Hzにおける振動入力パワーと音響放射パワーの関 係を図1に示す.図1(a)の振動入力パワーの結果より, 3種のパラメータの中で変動幅が大きいのが板厚で,損 失率については変動しないことが示されている.これは,



(a) Comparison of vibration energy.





Fig.4 Comparison between measured result and predicted results with and without variation of input power by numerical analysis.







(b) Sound energy.



式(11)と(12)より分母分子にある η<sub>int</sub>(ω)が相殺されるため であり、また曲げ波数もη<sub>int</sub>(ω)の関数ではないからである. 一方,図 1(b)の放射パワーの結果より、損失率の影響が 表れ、板厚に次いで変動が大きいことが示されている.

### 3. 単純構造物への適用

本章では、前章で示した基礎理論をベースに、1 要素 の平板構造物とL型の2要素構造物を対象に、SEAを用 いた摂動法による振動エネルギーと二乗音圧応答予測手 法に対して、構造変更による振動入力パワーの変動を考 慮した場合としない場合での応答予測への影響について 検討する.

#### 3.1 1要素系への適用

**3.1.1 問題設定** 図 2 で示す鋼製の平板構造物は,板 厚が1.6mm,幅0.6m,高さ0.3mで、図中の矢印は、構 造への入力位置(1Nの単位入力)で、5点の青丸は振動 応答を示し,音の評価(中央で平板から 0.155 m の高 さ)は1点とし、各入力と応答位置は、ランダムに配置 した.境界条件は自由支持で,FEM による構造解析, BEM による音響解析とリアル実験により構造変更による 振動入力パワーへの影響を検討する. FEM による数値解 析では、有限要素解析ソフトウェア PAM-VA One 2016 に より検討し, 鋼の材料特性は, 密度 7800 kg/m<sup>3</sup>, ポアソ ン比 0.3125, 解析対象周波数は 10 Hz から 5k Hz までの 10 Hz 刻みの離散周波数とし, MATLAB による SEA パラ メータの計算は, 31.5 Hz から 4k Hz までの 1/3 オクター ブ帯域周波数特性を算出した.要素サイズは、6k Hz まで の曲げ波長に 6 節点が含まれるよう設定した結果, 全節 点数は 2145, 全要素数は 2048, である. 数値解析ではモ デルに与える損失率である ILF を構造変更として、デフ オルトでは全モード一律に 0.005 %,構造変更では 0.05 % として減衰を上げ、質量変化はない.

実験においては, FFT アナライザー(小野測器, DS3200)にハンマー,加速度計,マイクロフォンを接続 し,5回のパワースペクトル加算平均を矩形窓関数で0 Hzから5k Hzまでの1.5625 Hz刻みの離散周波数で測定 し20 Hzから4k Hzまでの1/3オクターブ帯域周波数特性 を算出した.鋼板の4隅をゴムにより吊り下げた自由支 持の状態で,インパルスハンマー(キスラー,9724A) による入力の力の測定とその近傍に設置した加速度計 (PCB, 353B15) により加振点の応答を測定し,そのと きの放射音の音圧をマイクロフォン (PCB, 130E20) で 測定した.また,実験では板全面へのブチルゴム 2 mm の制振材貼付 (なしの質量が 2.17 kg,有りが 2.78 kg)を 構造変更とした.

3.1.2 結果と考察 モード解析の結果,対象とする構 造の固有振動数は、約 24 Hz から見られた.構造変更に よる SEA 基礎式である P=ωLE から入力パワーP と要素 エネルギーE を用いて算出した ILF と振動入力パワーの 数値解析による結果を図3に、図4に振動入力パワーの 変動を考慮した場合としない場合の構造変更した対象の 振動エネルギーと音エネルギーの予測結果の比較を示す. また、図5に振動エネルギーと音エネルギーの感度を示 す. 図 3(a)より, FEM による数値解析では構造変更によ る ILF の影響が表れ、概ね全周波数帯域において、構造 変更で設定した 0.05 %のほうが大きな値を示している. また図 3(b)より構造入力パワーは、高周波数帯域を除い て構造変更した対象が概ね大きめに表れている. 図 4(a) より振動エネルギーの予測については、1k Hz 程度までは、 入力パワー変動の影響を考慮した場合が実測結果と近い 値を示しているが、2kHzを除いて高周波帯域ではどちら の予測結果も良好ではなく大きな違いは見られない. 図 4(b)より音エネルギーの予測については、構造結果と同様 1k Hz 程度までは、入力パワー変動の影響を考慮した場合 が実測結果と近い値を示している.図4 で示した高周波 帯域での予測結果が良好でない原因は、図 5(a)で示すよ うに式(8)の振動感度が高く、さらに式(10)の二乗音圧感 度も高く、その値を乗算した音響感度が高くなり、予測 が良好でないと言える.

次に,実験結果を図 6 の(a)~(d)に示す.図 6(a)より ILF については,400 Hz 帯域からゴム貼付による減衰の 効果が表れている.図 6(b)の振動入力パワーの比較では, 400 Hz 帯域からオリジナルの結果に比較して概ね大きめ の値を示している.実験では FEM による結果と周波数帯 域が異なっているが,FEM では構造変更による質量の影 響がないためであると考えられる.図 6(c)の振動エネル ギー予測の比較では,紙面の都合上省略するが,入力パ ワーの変動の考慮の有無で振動感度にほとんど違いがな いためである.また,図 6(d)の音エネルギー予測の比較 では,630 Hz 帯域程度までは,入力パワーの変動の考慮



(a) ILF results by structural modification.



(b) Structural input power results by structural modification.



(c) Comparison of vibration energy.



(d) Comparison of sound energy.

Fig.6 Comparison between measured result and predicted results with and without variation of input power by real world experiment.

の有無で違いはほとんど見られないが,それ以降では入 カパワーの変動を考慮した場合が良好ではあるが,実測 と4 dB 程度の違いが見られる帯域もあり、測定環境(一般的な居室)の影響から高周波の音の予測は難しいと考 えられるが、詳細な音測定環境の説明については今後の 課題とする.

#### 3.2 2要素系への適用

3.2.1 問題設定 対象とする 2 要素の鋼製(SPHC) のL型平板構造物を図7に示す.平板1の長さ(L1)は 0.5 m,平板2(L2)は0.3 mで,結合辺(L3)は0.6 m である.板厚は1.6 mmで,境界条件は,1枚平板と同様



Fig.7 Test plate 2, including excitation (circles), and response (triangles) locations of each subsystem.

Table 1 Number of modes per band for each subsystem.

	Subsystem 1	Subsystem 2
20	1	0
25	1	1
31.5	0	1
40	2	0
50	1	0
63	1	2
80	2	0
100	1	1
125	3	3
160	2	1
200	4	2
250	4	3
315	6	4
400	5	3
500	9	6
630	10	7
800	13	6
1000	14	11
1250	19	12
1600	26	14
2000	30	20
2500	38	24
3150	51	30
4000	62	38



(a) Structural input power results at subsystem 1 when power is injected to subsystem 1.



(b) Comparison of vibration energy.



(c) Comparison of sound energy.

Fig.8 Comparison between measured result and predicted results with and without variation of input power by real world experiment for L shaped plate.

に鋼板の隅をゴムにより吊り下げた自由支持の状態で検 討する. 図中の丸印は,構造への入力位置で,5 点の三 角印は振動応答の測定位置を示し,音の評価位置は図 7 の O を原点とすると(x, y, z)=(0.3, 0.25, 0.15)の1点とした. 実験条件は前節と同様で,構造変更は,材質 SUS304 で 板厚 1 mm,長さが 0.1 m×0.1 mの部材(質量 77 g)を, 平板 1 の入力位置を中心に接着材で貼り付けた.

3.2.2 結果と考察 FEM で検討した対象構造のそれ ぞれの要素の固有振動数の個数の結果を,表1に示す. 表1より,20 Hz 程度から固有振動数があり,以下は20 Hz 帯域の結果から示すこととする.図8に構造変更の有 無による要素 1 加振時の振動入力パワーの結果,振動入 カパワーの変動を考慮した場合としない場合の構造変更 した要素 1 の振動エネルギーと音エネルギーの予測結果, の比較を示す. 図 8(a)より,入力箇所への板貼付の構造 変更により概ね全ての帯域で入力パワーが小さくなって いることがわかる.また図 8(b)より,振動エネルギーの 予測は入力パワーの変動考慮の有無に関わらず実測結果 より大きめに見積もられ,図 8(c)より,音エネルギーの 予測は入力パワーの変動を考慮した場合が比較的全ての 帯域で定量的に良好な結果が得られている.

### 4. おわりに

本報は、SEA による摂動法を用いた振動エネルギーと 二乗音圧応答予測手法に対して、構造変更による振動入 カパワーの変動を考慮した場合としない場合での影響を 明らかにすることを目的に、1 枚平板では、FEM による 振動解析、BEM による音響解析結果と実験ベースで検討 し、L 型平板では部分的に構造変更を施した対象構造へ 実験ベースで検討した.

その結果,1 要素系の構造物の結果より,振動と音響 感度の比較的高い周波数帯域では入力パワーの変動を考 慮しても精度の高い予測は難しいこと,2 要素系の実験 結果から,基礎理論で示した板厚を上げることが振動入 カパワーを下げることに有効であること,を示すことが できた.また両対象構造の実験結果から,振動エネルギ ーの予測においては入力パワー変動の影響は小さいが, 音エネルギーの予測においては,入力パワーの変動を考 慮することが有効であることが示せた.

今後は、本手法の更なる有効性を検討するため、①振動入力パワー変動の予測法の確立、②簡易構造を対象とした音エネルギー予測の音響評価点位置の影響、③3要素以上の実構造物への展開、が必要であると考えている.

#### 謝辞

本研究の一部は,公益財団法人 JKA の競輪\*の補助 (2017M-114)を受けたものであり,ここに謝意を表す る.

#### 参考文献

- R. H. Lyon, Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Application, MIT Press, (1975).
- (2) A. C. Nilsson, Reduction of structure-borne sound in

simple ship structures: Results of model tests, Journal of Sound and Vibration, 61(1), (1978), pp. 45-60.

- (3) C. Aran and M. Dhanesh, Efficient Optimum Design in Statistical Energy Analysis Framework: Proceedings of Eleventh International Congress on Sound and Vibration, (2004), pp. 3249-3256.
- (4) F. J. Fahy and A. D. Mohammed, A study of uncertainty in applications of SEA to coupled beam and plate systems, Part 1: Computational experiments, Journal of Sound and Vibration, 158(1), (1992), pp. 45-67.
- (5) J. A. Steel and R. J. M. Craik, Statistical Energy Ana lysis of Structure-Borne sound transmission by finite element methods, Journal of Sound and Vibration, 178(4), (1994), pp. 553-561.
- (6) B. L. Clarkson and M. F. Ranky, On the measurement of the coupling loss factor of structural connections, Journal of Sound and Vibration, 94(2), (1984), pp. 249-261.
- (7) 黒田勝彦,山崎徹,SEAとTPAによる機械構造物の入 カパワーと伝達寄与に関する一考察,日本機械学会 論文集C編, Vol.79, No.799(2013), pp. 495-506.
- (8) 山崎徹,黒田勝彦,森厚夫,SEAによる機械製品の
   固体音低減プロセス,日本機械学会論文集C編,
   Vol. 73, No.726 (2007), pp. 446-452.
- (9) K. Kuroda, F. Kuratani, and T. Yamazaki, "The Method of Application of SEA in Structural Design Process for Reducing Structure-borne Noise in Machinery Part2: Structural Optimization of Subsystems", MECHANICS, Vol. 28, No. 3 (2009), pp. 76-82.
- (10) D. A. Bies, and S. Hamid, In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method, Journal of Sound and Vibration, 70, (1980), pp. 187-204.
- (11) N. Lalor, Practical Considerations for the Measurement of Internal and Coupling Loss Factors on Complex Structures, ISVR Technical Report No.182.
- (12)林 巌,岩附 信行,牧 泰希:歯車騒音の放射パワーの推定に関する研究,日本機械学会論文集C編,

Vol. 56, No.531 (1990), pp. 208-214.

- (13) L.Cremer, M. Heckl, and B.A.T Petersson, Structure-B orne Sound, pp. 301-303, Springer.
- (14) F. G. Leppington, E. G. Broadbent, F.R.S, and K. H. Heron, The acoustic radiation efficiency of rectangular panels, Proc. R. Soc. Lond, A382, (1982), pp. 245-271.