

## 【複合新領域】

研究論文

実航海の自然条件や動力系の制約に対処可能な  
船舶の航海最適化技術金丸 英幸<sup>\*1</sup>Ship Navigation Optimization Technologies with Countermeasures  
for Sea Conditions and Restriction of Propulsive Power System

KANAMARU Hideyuki

## Summary

The amount of air pollutant, Sox and Nox, emitted by a ship during ocean navigation is regulated by the International Maritime Organization (IMO) to prevent air pollution on the sea.

The author presented navigation optimization technologies to reduce exhaust gas by adjusting fuel consumption locally during voyages under wave conditions without consideration of tidal or ocean current, as well as restriction of main engine output and safe navigation speed under rough sea conditions.

In this paper, navigation optimization technologies are improved to solve the optimization problem subject to all these additional conditions of the sea and ship operation, corresponding to actual navigation.

Moreover, the effectiveness of expanded optimization technologies is confirmed for several combinations of the above conditions through numerical simulation.

**Keywords :** ( optimum navigation, current, main engine output, fuel consumption )

## 1. 緒言

地球環境汚染の社会問題化に呼応して、国際海事機関 (IMO) が船舶運航時の排ガスに含まれる窒素酸化物や硫黄酸化物に規制を設け、その規制値が段階的に強化されている<sup>1)</sup>。

筆者は、先行研究<sup>2)</sup>で、航海で消費される燃料を最小化することによって排ガスの発生を抑制する精密な航海最適化技術について考察し、波浪下の対水運動を基礎に、航路保持の下で目的地までの主機出力を最適に配分するための速力の決定方程式を導いた。

しかしながら、実航海にこの技術を適用するために

は、

- (1) 潮流や海流の作用による対地運動への対処
- (2) 主機能力の限界への対応や主推進軸系に過大な負荷を与える主機の危険回転域回避
- (3) 荒天時の安全確保のための運航限界速力超過の防止

という問題を解決しなければならない。

本稿では、実航海で発生するこれらの諸条件を考慮した航海最適化技術について精密に解析し、主機出力、即ち、速力配分の決定方程式を拡充するとともに、数値シミュレーションによってその効果を検証する。

<sup>\*1</sup> 大学院 非常勤講師 / 新技術創成研究所 客員研究員

## 2. 対水運動を基礎とした航海最適化技術<sup>2)</sup>

### 2.1 就航環境の離散値化

気象海象予報のデジタルデータは、一般的に、経緯度方向の矩形の海域を単位として陸上の気象海象予報データサービス機関から配信される。Fig.1 に示す通り、設定航路  $\sigma$  をこの矩形の海域の境界との交点および変針点によって分割した線分を、航路要素  $\Delta\sigma_i$  ( $i = 1 \cdots n$ ) と定義する。

通常、航海では、航路に沿って一定の距離の定速航行を繰り返して船舶を目的地に導く。したがって、航路要素  $\Delta\sigma_i$  上では速力一定で船を進めることにすれば、波浪抵抗やそれに起因する自然減速、進行方向に対する相対波向などの各種就航条件も一定となり、航路要素を基本単位として航海最適化を図ることが可能となる。

### 2.2 燃料消費量の定式化

船舶の推進運動方程式を馬力変換して主機関の燃料消費率を掛け合わせ時間軸で積分することによって、操縦運動を評価する第一評価関数  $J_{1i}$  との重構造で、船舶運航の燃料消費量（第二評価関数  $J_2$ ）を定式化することができる<sup>2)</sup>。

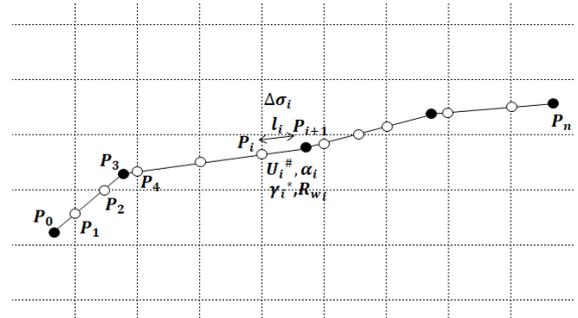
$$J_{1i} = \int_0^\infty \left( \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2\alpha_i^2} + \frac{(m'_0 + m'_y)\beta r' + C_{\delta i}' \delta^2}{C_{h i}'} \right) dt' \quad (1)$$

- $\Delta\psi$  : 針路と設定針路の偏差
- $r$  : 回頭角速度       $\beta$  : 横流れ角
- $\delta$  : 操舵量 (舵角)
- $m_0$  : 質量       $m_y$  : 付加質量 (横方向)
- $C_h$  : 船体抵抗係数       $C_\delta$  : 舵抵抗係数

$$J_2 = \sum [\gamma_i^* C_{h i} U_i^2 (l_i + \alpha_i^2 L J_{1i})] \quad (2)$$

- $U$  : 速力       $L$  : 船体長
- $\gamma^*$  : 推進軸系の伝達効率と推進効率で補正された燃料消費率

但し、各々の式の中の添え字「 $i$ 」は航路要素  $\Delta\sigma_i$  上の状態量であることを、また、第一評価関数の「 $i$ 」は、無次元化された量であることを示す。



$l_i$  : 航路要素長 ( $P_i \rightarrow P_{i+1}$ )、 $R_{wi}$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の波浪抵抗  
 $U_i^\#$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の船速、 $\alpha_i$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の波浪による自然減速係数  
 $\gamma_i^*$  :  $\Delta\sigma_i$ 上の燃料消費量 (伝達&推進効率による補正值)

Fig.1 航路要素

### 2.3 最適速力の決定方程式

航路要素毎の最適速力は、航海の定時性確保のために総航海時間  $T_v$  を拘束した上で、燃料消費量（第二評価関数）を最小化することによって求められる。

状態量  $X$  の速力  $U$  による偏微分を

$$X_U \equiv \frac{\partial X}{\partial U} \quad (3)$$

と表して、(2)式に  $\lambda$  を未定係数とするラグランジュの未定係数法を適用することにより、最適速力  $U_i$  の精密な決定方程式が  $(n+1)$  元連立方程式として以下の通り導かれる (精密解法)<sup>2)</sup>。

$$\begin{aligned} & \{ C_{h i} [\alpha_i^2 (\gamma_{U_i}^* U_i + 2\gamma_i^*) l_i \\ & \quad + \alpha_i^3 \{ \gamma_{U_i}^* \alpha_i U_i + 2\gamma_i^* (1 - \Delta U_{U_i}) \} L J_{1i}^{opt} \\ & \quad + \gamma_i^* \alpha_i^4 U_i L J_{1i}^{opt} ] \\ & \quad + C_{h U_i} \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (l_i + \alpha_i^2 L J_{1i}^{opt}) \} U_i^3 \\ & = (1 - \Delta U_{U_i}) l_i \lambda \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum \frac{l_i}{\alpha_i U_i} = T_v \quad (5)$$

$T_v$  : 総航海時間 (拘束条件)

## 3. 潮流や海流を考慮した航海最適化

### 3.1 潮流や海流下の対地船速

実際の航海では、対水運動に加えて潮流や海流の影響を受ける。その作用を受けて設定航路上を航海する「航路保持」のためには、針路の補正が必要になる。

Fig. 2 に示す通り、潮流や海流の流速を  $v_{ci}$ 、その流向と設定航路の方位との偏差（流向偏差）を  $\Delta\theta_i$  とすれば、対地船速  $U_i^*$  および針路補正值  $\Delta\phi_i$  とこれらの状態量の間には以下の関係式が成り立つ。

$$U_i^* = \alpha_i U_i \cos \Delta\phi_i + v_{ci} \cos \Delta\theta_i \quad (6)$$

$$\Delta\phi_i = \sin^{-1} \frac{v_{ci} \sin \Delta\theta_i}{\alpha_i U_i} \quad (7)$$

また、(6)式より、対水運動対応の実航程と航路要素長の航程比  $\zeta_i$  が、次式で表される。

$$\zeta_i = \frac{1}{\cos \Delta\phi_i + v_{ci} \cos \Delta\theta_i / (\alpha_i U_i)} \quad (8)$$

さらに、航路要素  $\Delta\sigma_i$  に対する相対波向を  $\chi_i$  とすると、潮流や海流に対処する針路補正後の相対波向  $\chi_i^*$  が次式で与えられる。

$$\chi_i^* = \chi_i + \Delta\phi_i \quad (9)$$

以上の結果、潮流や海流下の第二評価関数（燃料消費量）と総航海時間の拘束条件が、(2)、(5)式に替えて以下の通り導かれる。

$$J_2 = \sum [\gamma_i^* C_{hi} U_i^2 (\zeta_i l_i + \alpha_i^2 L J_{1i})] \quad (10)$$

$$\sum \frac{\zeta_i l_i}{\alpha_i U_i} = T_v \quad (11)$$

### 3.2 主機出力（速力）最適化

本節では主機出力の制約条件を考慮せず、潮流や海流下の航海最適化技術について考える。(11)式の拘束

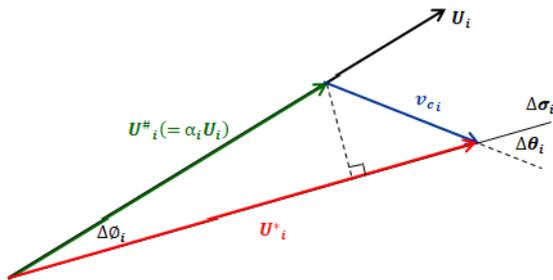


Fig.2 潮流補正

条件の下で(10)式にラグランジュの未定係数法を適用することによって、第二評価関数（燃料消費量）を最小化する速力  $U_i$  の決定方程式が、次式と(11)式の  $(n+1)$  元連立方程式として導かれる。

$$\begin{aligned} & \{C_{hi}[\alpha_i^2 (\gamma_{U_i}^* U_i + 2\gamma_i^*) \zeta_i l_i \\ & + \alpha_i^3 \{\gamma_{U_i}^* \alpha_i U_i + 2\gamma_i^* (1 - \Delta U_{U_i})\} L J_{1i}^{opt} \\ & + \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (\alpha_i^2 L J_{1i}^{opt} + \zeta_i l_i)\} \\ & + C_{hU_i} \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (\zeta_i l_i + \alpha_i^2 L J_{1i}^{opt})\} U_i^3 \\ & = \{(1 - \Delta U_{U_i}) \zeta_i - \alpha_i U_i \zeta_{U_i}\} l_i \lambda \quad (12) \end{aligned}$$

荒天域では、船体が波浪による過大な外力を受けたり、それによって励起される激しい船体運動が発生する。その結果生じる船体の損傷やデッキの冠水等の危険を防ぐために、減速して航海するのが一般的である。したがって、荒天時の船体運動を軽減し航海の安全を確保するために、速力  $U_i$  のリミッタとして、運航限界に関する萩原の式<sup>3)</sup>で与えられる運航限界速力  $U_{noli}$  を導入する。

$$U_i = U_{noli} \quad (U_i^* = \alpha_i U_i > U_{noli}^*) \quad (13)$$

$$U_{noli}^* = \alpha_{noli} U_{noli} = e^{a_v(q_v - h_i)^{b_v}} + r_{v_i} \quad (14)$$

$h_i$  : 有義波高

$\alpha_{noli}$  : 運航限界速力対応の自然減速係数

$$q_{v_i} = a_q + b_q |\chi_i^*|^{c_q} \quad (15)$$

$$r_{v_i} = a_r + b_r |\chi_i^*|^{c_r} \quad (16)$$

因みに、北沢ら<sup>4)</sup>が、造船研究協会108部会のモデルシップである一軸コンテナ船を対象に、船首部海水打ち込み、横揺れ、波浪縦曲げモーメントなど7項目について、波浪条件と船速の組合せで船体の挙動を分析し、その上で鋼船規則などを基準とした過大な船体応答の発現確率に基づいて安全航行の船速域を示した。萩原の式(13)～(16)はこの研究結果の近似式である。

(10)、(11)式の  $\zeta_i$ 、 $l_i$  と、基準航海および理想航海<sup>2)</sup>の船速  $U_i^*$ 、 $U_i$  とそれぞれの航海時間  $T_i^*$ 、 $T_i$  の間に以下の等価関係

$$\zeta_i l_i = U_i^* T_i^* = (\alpha_i U_i) \left( \frac{T_i}{\alpha_i} \right) = U_i T_i \quad (17)$$

が成り立つことを考慮すると、(10)式より、実航海の主機出力  $P^*_i$  が次式の通り導かれる。

$$P^*_i = \frac{1}{\eta_t \eta_p} C_{h_i} U_i^3 \left( 1 + \frac{\alpha_i^2 L}{\zeta_i l_i} J_{1_i}^{opt} \right) \quad (18)$$

$\eta_t$  : 伝達効率、 $\eta_p$  : 推進効率

運航限界速力  $U_{noli}$  以下の解を求める手法には、リミッタの外、ペナルティ関数の導入などが考えられるが、本稿では取り扱いが容易なリミッタ法を採用する。

#### 4. 主機の能力と危険回転域を考慮した航海最適化

本章では、潮流や海流に加えて主機出力の制約と危険回転域を考慮した航海最適化技術について考察する。

(11)、(12)式の連立方程式は、海象条件や総航海時間の指定によっては、最適速力として、一部または全ての航路要素で主機能力や運航限界速力超過、或いは、危険回転域内の解を与える可能性がある。これらのケースではリミッタを適用して、主機出力の最適解を運転可能域との境界値  $P_{bnd_i}$  に置き替える。即ち、

$$P^*_i = P_{bnd_i} \quad (19)$$

但し、 $P_{bnd_i}$  は、以下の通り定義する。

(1) 主機能力の限界  $P_{mcr}$  を超過した場合

$$P_{bnd_i} = P_{mcr} \quad (P_{mcr} < P^*_i) \quad (20)$$

(2) 危険回転域回避を要する場合

危険回転域の下端を  $P_{hzdL}$ 、上端を  $P_{hzdH}$ 、その中間値を  $P_{hzdM}$  として、

$$P_{bnd_i} = \begin{cases} P_{hzdL} & (P_{hzdL} < P^*_i < P_{hzdM}) \\ P_{hzdH} & (P_{hzdM} \leq P^*_i < P_{hzdH}) \end{cases} \quad (21)$$

$$P_{hzdM} = \frac{P_{hzdL} + P_{hzdH}}{2} \quad (22)$$

(3) 運航限界速力を超過した場合

運航限界速力  $U_{noli}$  に対応する主機出力を  $P_{noli}$  とすると

$$P_{bnd_i} = P_{noli} \quad (P_{noli} < P^*_i) \quad (23)$$

特に、 $P_{noli}$  が危険回転域内にある場合は、

$$P_{bnd_i} = P_{hzdL} \quad (P_{noli} < P^*_i \text{ かつ } P_{hzdL} < P_{noli} < P_{hzdH}) \quad (24)$$

(11)、(12)式からなる  $(n+1)$  元連立方程式と(13)、(19)式の組合せが、新たな決定方程式となる。

尚、未定係数  $\lambda$  の値は(8)、(11) および(12)式を連立させ、反復計算によって収束させる。

一方、主機出力が能力の限界に達した場合や危険回転域の回避を要する場合の速力  $U_i$  は、 $C_{h_i}$ 、 $\alpha_i$ 、 $\zeta_i$ 、 $J_{1_i}^{opt}$  が  $U_i$  に依存することに留意して、次式から逆算しなければならない。

$$\frac{1}{\eta_t \eta_p} C_{h_i} U_i^3 \left( 1 + \frac{\alpha_i^2 L}{\zeta_i l_i} J_{1_i}^{opt} \right) = P_{bnd_i} \quad (25)$$

潮流補正を伴う自然減速量および第一評価関数の速力  $U$  による偏微分  $\Delta U_U$  と  $J_{1_U}^{opt}$  の解法を、それぞれ付章1と付章2に示す。

因みに、リミッタの導入により、これらの方程式から導かれた速力  $U_i$  は、第二評価関数（燃料消費量）を最小化するという当初の目的に対しては、最適解ではなく準最適解となることに注意を要する。

#### 5. 数値シミュレーションによる検証

##### 5.1 シミュレーションの算法

最適速力  $U_i$  の決定方程式(12)式は、左辺、右辺ともに  $U_i$  に依存する非線形の方程式である。したがって、その求解には反復計算によって解を収束させる手法（大域的収束計算）を採用した。

一方、大域的収束計算の各反復過程で生じる以下の状態量や変数の求解にはニュートン法による収束計算（局所的収束計算）を適用した。

- (1) 船体抵抗係数  $C_h$  の計算の基礎となるシェーンヘルンの式から導かれる相当平板の摩擦抵抗係数  $C_f$  の計算<sup>2)</sup>





Table 6 シミュレーション結果（運航限界速力超過防止）

航海時間 設定(hr)	204.00	主機出力 最大(ps)	27500	主機能力 処理法	燃料消費量 (t)	実航海時間 (hr)	流速 (kt)	流向偏差 (deg)	
航路要素	変針角 (deg)	航程 (ml)	有義波高 (m)	相対波向 (deg)	リミッタ法	586.648	204.00	0.2	30.0
					針路補正 (deg)	主機出力 (ps)	実船速 (kt)	操舵制御ゲイン (k1   k2)	
房総沖(0)	0.000	568.0	1	150	-0.252	24090	22.73	0.195	9.809
1	6.391	500.1	4	-45	-0.251	27119	22.86	0.199	9.738
2	6.877	452.0	2	-170	-0.252	24198	22.73	0.196	9.807
3	7.193	421.0	1	80	-0.252	24106	22.73	0.195	9.809
4	7.375	405.2	3	30	-0.251	25790	22.79	0.198	9.774
5	7.442	403.3	6	0	-0.340	18749	16.83	0.225	13.437
6	7.405	415.1	5	160	-0.252	25517	22.78	0.197	9.780
7	7.257	441.6	4	-135	-0.252	24913	22.75	0.197	9.794
8	6.982	484.7	2	-90	-0.252	24265	22.73	0.196	9.806
9	1.967	447.0	3	60	-0.252	25183	22.76	0.197	9.788
S.F.沖(10)									

して数値シミュレーションを実施した。

シミュレーション結果を Table 6 に示す。表中、緑色表示は、運航限界速力に対応した主機出力を示す。

### 5.8 数値シミュレーション結果に対する考察

#### 5.8.1 潮流または海流の影響

海流のみが作用する場合は、Table 3 より以下の合理的な結果を読み取ることができる。

- (1) 海流に対して順行の場合は、海流がない場合に比べて主機出力が小さく抑えられる。その結果、実船速も小さくなり、燃料消費量を約 2.2% (約 12.1 トン) 削減することができる。これは、海流に乗って対地船速が大きくなることが原因である。
- (2) 海流に逆行する場合は、必要な対地船速を確保するために、海流がない場合に比べてより大きな主機出力を要し、燃料消費量も約 2.2% (約 12.3 トン) 増大する。
- (3) 各々の場合で適切な針路補正值が導かれるが、各航路要素で海流データが一定であるにも拘らず、その値は一定ではない。これは、航路要素毎に波浪データが異なるため自然減速が同一にはならないことが主な原因である。

以上の結果は、実航海では、本船の進行方向が海流に対して順向の場合はそれを利用し、逆向の場合は回避して航海することによって、燃料消費量、したがっ

て、排ガスの削減が可能となることを示している。

#### 5.8.2 主機能力の限界の影響

海流に加えて主機能力の限界が拘束条件となる場合は、Table 4 より以下の特徴を読み取ることができる。

- (1) 主機出力無制限の場合は、燃料消費量を最小化する解が得られるが、航路要素 1 と 4 で主機出力が能力を超えるため航海の現場に適用することはできない。
- (2) リミッタを用いて主機出力を最適化した場合は、航路要素 1 と 4 の出力が能力の限界値に抑えられ、無制限の場合に比べて、他の航路要素で主機出力が大きくなっている。特に、航路要素 6 では、主機出力が新たに能力を超えて限界値に抑えられているが、それも含めて全体的な最適化が行われ、かつ、定時性（総航海時間）も確保されている。
- (3) 決定方程式やリミッタの非線形性のために、反復計算なしでは定時性を満足する主機出力の解を得ることができないが、大域的収束計算によって諸条件を全て満足する解が得られている。

#### 5.8.3 主機の危険回転域の回避

Table 5 より、以下の特徴を読み取ることができる。

- (1) 主機出力無制限の場合には、航路要素 5、7、9 で解が危険回転域内にある。

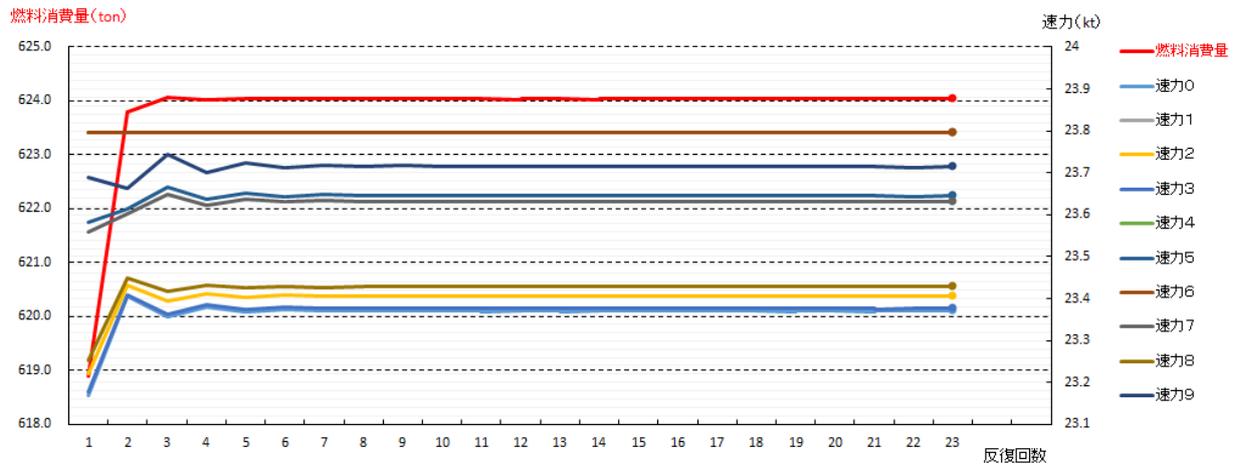


Fig.3 大域的収束過程

(2) 一方、リミッタを伴う最適化処理の結果、主機出力が、航路要素 5、7 では低回転域側、航路要素 9 では高回転域側の境界上に回避され、さらに、定時性も確保されている。

5.8.4 運航限界速力超過の防止

Table 6 より、以下の特徴を読み取ることができる。

- (1) 航路要素 5 で実船速が運航限界速力を超過し、主機出力が低く抑えられている（緑色表示）。
- (2) 主機出力の抑制と荒天域の波浪抵抗増による自然減速によって、実船速が安全な範囲まで低減されている（太字表示）。また、他の航路要素で増速することにより定時性も確保されている。

5.8.5 大域的収束過程

Table 4 に示す主機能力限界の制約を付した場合に、燃料消費量および各航路要素に配分された速力が準最適解に収束していく様子を Fig.3 に示す。本図より、与えられた諸条件の下で解が速やかに収束し、2、3 回の反復計算で収束判定基準に達していることが分かる。

因みに、Table 3 ~ Table 6 の全てのケースで、12 ~ 30 回の反復計算で解が収束した。

以上の結果、航海の現場では主機能力の限界や危険回転域が存在し、また、荒天時の航海もあり得ることを考慮すると、本技術のリミッタ処理と大域的収束計算は実航海への適用にとって必須の要件である。

6. まとめ

本研究では、対水運動を基礎に導いた航海最適化の技術<sup>2)</sup>に、航海の現場で直面する

- (a) 潮流や海流への対応
- (b) 主機能力の限界と危険回転域への対処
- (c) 荒天域における運航限界速力超過の防止

という 3 通りの条件を付加し、対地運動を基本とする実航海最適化のための速力の決定方程式を導いた。

一般的には、この解法は燃料消費量最小化という意味では準最適解を与えるが、主機の能力不足への対応や危険回転域の回避、運航限界速力超過の防止という実航海の制約条件に対応可能で、さらに、

- (1) (20)式において、主機出力無制限 ( $P_{mcr} = \infty$ ) の場合や(21)式の危険回転域がなく、かつ、速力の最適解が運航限界速力以下でリミッタを必要としない通常の場合には、基本となる決定方程式(12)式が無条件で成立する。
- (2) さらに、 $v_c = 0$  とおくことにより、(12)式と(11)式から海流がない場合、即ち、対水運動を基礎とした決定方程式(4)式と(5)式を導くことができる。

したがって、本研究で提案した技術は、就航海域の自然条件や主機能力の限界、荒天時の船体の危険防止などを考慮しなければならない実航海に適用するための最も一般化された求解の手段で、潮流や海流がない場合や完全静水中の航海最適化問題も網羅している。

航海の現場では、荒天域を回避して航路を計画し、

主機の能力や危険回転域を考慮して総航海時間を指定するのが通例である。したがって、多くの場合にリミッタが不要となって、本稿で導いた解法は、燃料消費量最小化という本来の目的に対して最適解を与える。

最後に、数値シミュレーションで、潮流や海流の補正機能、主機に関する制約条件や荒天時の運航限界速度を考慮した航海最適化技術の効果を定量的に評価し、本研究で提案した技術が、実航海における船舶の燃料消費量、したがって、排ガス削減による海洋の大気汚染抑制のために有効に機能することを確認した。

本技術の基礎となる海象データについては、波浪データは地球規模で当日から11日先まで予報する技術が確立しており、既に、日に4回の頻度で更新され、オンライン配信サービスも行われている<sup>8)</sup>。一般的に高速コンテナ船による北太平洋航路の航海は片道1週間～10日を要するので、航海の期間中の全海域の波浪予報最新データを入手することができる。また、大洋の海流は季節毎に比較的安定しており、月毎のデータがパイロットチャートでサービスされている。さらに、日付変更線以西の北太平洋では海流の1ヶ月予報の技術も確立されており、月に3回の頻度で、更新された予報データの配信をオンラインで受けることができる<sup>8)</sup>。

波浪は、大洋の海流に比べて変動が激しいが、本技術を航海支援装置に組み込む際に、通信衛星などを経由して更新データを入手した時点で、最新の現況・予報データに基づき、再度、その位置から目的港までの航海最適化処理を実行する機能を賦与することによって、海象予報の変動にも対処可能である。

## 参考文献

- 1) 技術トピックス、日本海事協会
- 2) 金丸：船舶の航海最適化技術の精密化とオンボード航海支援装置への適用のための処理効率化、長崎総合科学大学紀要（2017）57巻、1号 p. 45-60
- 3) 萩原、巻島：最適航路に関する考察、日本航海学会論文集（1980）62号 p. 77-88
- 4) 北沢、黒井、高木：コンテナ船の波浪中での限界速度、日本造船学会論文集、第138号（1975）p. 269-276
- 5) 孫、野本：高速コンテナ船の操縦運動と横揺れの連成挙動について、日本造船学会論文集、第150号（1981）p. 232-244
- 6) 佐々木、高木：ディーゼル主機関の過度応答時の挙動について、日本博陽機関学会誌、第9号（1995-9）p. 651-660
- 7) 塙；随想・造波抵抗論議あれこれ
- 8) (財)気象業務支援センター ホームページ オンライン気象情報

## 付章1 潮流補正を伴う自然減速量の偏微分

潮流や海流が存在する場合は、潮流補正の結果、(9)式と(7)式より、補正した相対波向  $\chi^*$  が針路偏差  $\Delta\theta$  を介して速力  $U$  の関数となる。

一方、自然減速量  $\Delta U$  は、自然減速に関する萩原の式<sup>3)</sup>によって以下の通り与えられる<sup>2)</sup>。

$$\Delta U = m(P^*)f(h)g(\chi^*) \quad (26)$$

$$m(P^*) = a_m P^* + b_m \quad (27)$$

$$f(h) = a_f \{1 - \exp(-b_f h^c)\} \quad (28)$$

$$g(\chi^*) = 1 - a_g \{1 - \exp(-b_g \chi^{*c_g})\} \quad (29)$$

$P^*$  : 主機出力

$h$  : 有義波高

$\chi^*$  : 潮流補正後の相対波向

したがって、(26)式より、自然減速係数  $\alpha$  とその速力  $U$  による偏微分  $\alpha_U$  が以下の通り導かれる。

$$\alpha = 1 - \frac{\Delta U}{U} \quad (30)$$

$$\alpha_U = \frac{\Delta U}{U^2} - \frac{\Delta U_U}{U} = \frac{1 - \alpha - \Delta U_U}{U} \quad (31)$$

また、(26)式より、自然減速量の速力  $U$  による偏微分  $\Delta U_U$  が次式で表され、

$$\Delta U_U = a_m P^* U f(h) g(\chi^*) + m(P^*) f(h) g_{\chi^*}(\chi^*) \chi^* U \quad (32)$$

さらに、波浪抵抗や操縦運動を伴う実航海における主機出力  $P^*$  が次式で与えられる。

$$P^* = \frac{1}{\eta_t \eta_p} C_h U^3 \left( 1 + \frac{\alpha^2 L}{\zeta l} J_1^{opt} \right) \quad (33)$$

一般に、航路要素長  $l$  は船体長  $L$  より遥かに大きい。また、数値シミュレーションによる試算の結果  $J_1^{opt}$  は  $10^{-1} \sim 10^{-2}$  のオーダーとなるため、(33)式右辺の ( ) 内第2項は第1項の「1」に比べて無視できる程小さく、主機出力の偏微分  $P^* U$  に影響する度合いは僅少と考えられる。しかしながら、本研究では無視することなく精密な解析を試みる。即ち、

$$P^* U = a_p (1 - \Delta U_U) + b_p \quad (34)$$

$$a_p = \frac{1}{\eta_t \eta_p} C_h U^3 \frac{\alpha^2 L}{\zeta l} \left( \frac{\alpha \zeta}{\zeta} + 2 \right) J_1^{opt} \quad (35)$$

$$b_p = \frac{1}{\eta_t \eta_p} \{ U^2 (C_{hU} U + 3 C_h) \left( 1 + \frac{\alpha^2 L}{\zeta l} J_1^{opt} \right) + C_h U^3 \frac{\alpha^2 L}{\zeta l} (2 J_1^{opt} + J_{1U}^{opt}) \} \quad (36)$$

$$\alpha_\zeta = \frac{\cos \Delta\theta - \sin \Delta\theta \tan \Delta\theta}{(\alpha U \cos \Delta\theta + v_c \cos \Delta\theta)^2} v_c \quad (37)$$

(36)式において、船体抵抗係数  $C_h$  が摩擦抵抗係数と剰余抵抗係数に分解され、剰余抵抗係数が一定<sup>7)</sup>という条件の下では、船体抵抗係数  $C_h$  の速力  $U$  による偏微分  $C_{hU}$  は、海水密度  $\rho$ 、速力  $U$ 、シェーンヘルの式から求められる相当平板の摩擦抵抗係数  $C_f$  および浸水表面積  $S$  を用いて、次式で計算することができる<sup>2)</sup>。

$$C_{hU} = -\frac{\rho}{2U} \frac{C_f}{1 + \frac{0.558}{2} \frac{1}{\sqrt{C_f}}} S \quad (38)$$

さらに、(29)式より  $g(\chi^*)$  の  $\chi^*$  による偏微分  $g_{\chi^*}(\chi^*)$  が以下の通り求められる。

$$g_{\chi^*}(\chi^*) = a_g b_g c_g \chi^{*c_g - 1} e^{b_g \chi^{*c_g}} \quad (39)$$

また、(7)、(9)式および(31)式より、相対波向  $\chi^*$  の速力  $U$  による偏微分  $\chi^* U$  が次式で与えられる。

$$\chi^* U = \Delta\theta_U = -\frac{v_c \sin \Delta\theta}{\cos \Delta\theta} \cdot \frac{1 - \Delta U_U}{(\alpha U)^2} \quad (40)$$

以上の結果、(32)、(34)、(40)式を連立して解くことにより、自然減速量の速力  $U$  による偏微分  $\Delta U_U$  を計算することができる。

尚、付章2に示す通り、(36)式の  $J_{1U}^{opt}$  にも  $\Delta U_U$  が含まれているため、この連立方程式は非線形となる。したがって、ここでは最適速力  $U$  の求解のための収束計算(大域的収束計算)の過程で  $\Delta U_U$  も同時に収束させる方法を用いた。

## 付章2. 第一評価関数の偏微分

海流がない場合、航路要素における第一評価関数の最適値およびその速力  $U$  による偏微分は、始点の変針ベクトル  $x'_m(0)$  を用いて、次式で与えられる<sup>2)</sup>。

$$J_1^{opt} = {}^t x'_m(0) P'_{m\alpha} x'_m(0) \quad (41)$$

$$\begin{aligned} J_{1U}^{opt} &= J_{1\alpha} \alpha_U + J_{1C_h} C'_{hU} + J_{1C_\delta} C'_{\delta U} \\ &= \alpha_U {}^t x'_m(0) P'_{m\alpha} x'_m(0) \\ &\quad + C'_{hU} {}^t x'_m(0) P'_{mC_h} x'_m(0) \\ &\quad + C'_{\delta U} {}^t x'_m(0) P'_{mC_\delta} x'_m(0) \end{aligned} \quad (42)$$

但し、 $Q'_{m\alpha}$ 、 $S'_{m\alpha}$ 、 $R'_{m\alpha}$  は第一評価関数の係数を行列形式で表現した時の係数行列  $Q'_m$ 、 $S'_m$ 、 $R'_m$  の自然減速係数  $\alpha$  による偏微分、また、 $P'_m$  は、これらの係数行列と操縦運動に関する状態方程式の係数行列  $A'_m$ 、 $B'_m$  で構成されるリッカチの方程式

$$\begin{aligned} (P'_m B'_m + S'_m) R'_m{}^{-1} ({}^t B'_m P'_m + {}^t S'_m) \\ - P'_m A'_m - {}^t A'_m P'_m - Q'_m = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

の解行列<sup>2)</sup>で、(41)～(43)式の各変数の「 $'$ 」は無次元化量であることを示す。

また、(42)式右辺第1項の  $\alpha_U$  は、自然減速係数  $\alpha$  の速力  $U$  による偏微分で(31)式で与えられ、 $P'_{m\alpha}$  は、以下のリアプノフの方程式の解行列として得られる<sup>2)</sup>。

$$P'_{m\alpha}A'_f + {}^tA'_fP'_{m\alpha} + Q'_f = 0 \quad (44)$$

$$A'_f = A'_m - B'_mK'_f \quad (45)$$

$$K'_f = R'_m{}^{-1}({}^tB'_mP'_m + {}^tS'_m) \quad (46)$$

$$Q'_f = Q'_{m\alpha} - {}^tK'_f{}^tS'_{m\alpha} - S'_{m\alpha}K'_f + {}^tK'_fR'_{m\alpha}K'_f \quad (47)$$

因みに、(42)式右辺の  $P'_{m\mathbf{c}_h}$  と  $P'_{m\mathbf{c}_\delta}$  についても、(44)～(47)式において  $\alpha$  をそれぞれ  $\mathbf{c}_h$ 、 $\mathbf{c}_\delta$  に置き換えることによって計算することができる。

一方、海流が存在する場合は、第一評価関数の最適値  $J_1^{opt}$  において、航路要素の始点における変針ベクトル  $\mathbf{x}'_m(\mathbf{0})$  も、潮流補正值  $\Delta\theta$  を介して速力  $\mathbf{U}$  の関数となる。したがって、一般的に、航路要素  $\Delta\sigma_i$  の始点で隣接する状態量  $\mathbf{X}$  の差分を

$$\nabla(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1} \quad (48)$$

と定義すると、航路要素の始点における海流下の変針ベクトル  $\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0})$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}'_m(\mathbf{0}) + \begin{pmatrix} \nabla(\Delta\theta) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\nabla(\Delta\theta) = \Delta\theta_i - \Delta\theta_{i-1} \quad (50)$$

また、(42)式に替えて、第一評価関数の偏微分  $J_{1U}^{opt}$  が次式の通り導かれる。

$$\begin{aligned} J_{1U}^{opt} &= \alpha_U {}^t\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0})P'_{m\alpha}\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0}) \\ &\quad + \mathbf{c}_h{}'_U {}^t\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0})P'_{m\mathbf{c}_h}\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0}) \\ &\quad + \mathbf{c}_\delta{}'_U {}^t\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0})P'_{m\mathbf{c}_\delta}\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0}) \\ &\quad + 2 {}^t\mathbf{x}'_{cmU}(\mathbf{0})P'_m\mathbf{x}'_{cm}(\mathbf{0}) \end{aligned} \quad (51)$$

(49)式の  $\mathbf{x}'_m(\mathbf{0})$  は隣接する航路要素の方位差で、航路のみに依存し速力  $\mathbf{U}$  には依存しない。したがって、(40)式を用いることによって、(49)式から(51)式の右辺第4項の  $\mathbf{x}'_{cmU}(\mathbf{0})$  が以下の通り求められる。

$$\mathbf{x}'_{cmU}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \nabla(\Delta\theta_U) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla \left( \frac{v_c \sin \Delta\theta}{\cos \Delta\theta} \cdot \frac{1 - \Delta U_U}{(\alpha U)^2} \right) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (52)$$

以上の結果、(49)式と(52)式を(51)式右辺の最終項に適用することにより、海流下での第一評価関数の速力  $\mathbf{U}$  による偏微分  $J_{1U}^{opt}$  を計算することができる。但し、この計算には速力  $\mathbf{U}$  が必要となるが、速力  $\mathbf{U}$  の決定方程式(12)の左辺にも  $J_{1U}^{opt}$  が含まれているため、付章1と同様、その値は大域的収束計算の中で収束させる。

### 【正誤表】

ワードによる本論文の初稿作成時に(43)式に入力ミスがあったので、以下の通り修正しました。

正 (現)	$(P'_m B'_m + S'_m) R'_m{}^{-1} ({}^t B'_m P'_m + {}^t S'_m) - P'_m A'_m - {}^t A'_m P'_m - Q'_m = \mathbf{0} \quad (43)$
誤 (旧)	$(P'_m B'_m + S'_m) R'_m{}^{-1} ({}^t B'_m P'_m + {}^t S'_m) + P'_m A'_m + {}^t A'_m P'_m - Q'_m = \mathbf{0} \quad (43)$

尚、本件は単純な入力ミスで、数値シミュレーションのプログラムは当初より正しく作成されていることを確認しました。したがって、シミュレーション結果や本論文のまとめには影響しません。