

【複合新領域】

研究論文

オペレーション上の制約未達にペナルティを課す
船舶の航海最適化問題の解法金丸 英幸^{*1}A New Approach to Solve Ship's Navigation Optimization Problem
with Penalty Function for satisfying Restrictions of Nautical Operation

KANAMARU Hideyuki

Summary

In addition to conventional efforts to reduce the air pollutant Sox and Nox emitted by ships during navigation, it was agreed at the 72nd Marine Environment Protection Committee (MEPC72) of International Maritime Organization (IMO) held on April, 2018 to endeavor to completely eliminate greenhouse gases generated in marine transportation such as CO₂ as early as possible during the 21st century.¹⁾

The author presented the navigation optimization technologies to reduce exhaust gas by adjusting main engine output locally during voyage under wave conditions and ocean current with limiters to restrict main engine revolution and to prevent dangerous navigation speed under rough sea conditions.²⁾

In this paper, a new solution method is presented to satisfy the above restrictions of operation with penalty function instead of limiters, and the effect of these methods are compared and evaluated through several cases of numerical simulation.

Keywords : (optimum navigation, current, main engine output, fuel consumption, penalty function)

1. 緒言

国際海事機関 (IMO) による海洋の大気汚染防止への取り組みはますます強化されつつある。平成30年4月に開催されたIMOの第72回海洋環境保護委員会 (MEPC72) では、国際海運全体の燃費効率を段階的に改善し、今世紀中のできるだけ早い時期に、船舶が排出する二酸化炭素などの温室効果ガス排出ゼロを目指すことが合意された¹⁾。現時点では重油が船舶運航の主要なエネルギー源であることを考慮すると、燃料

消費によって排出される温室効果ガスや大気汚染物質を削減する努力は継続して行われなければならない。

筆者は、先行研究²⁾で、

- (1) 航海における潮流や海流の作用
- (2) 主機の能力限界や主推進軸系の共振を引き起こす危険回転域の存在
- (3) 荒天域における運航限界速力

という実航海で避けられない諸条件に対処して、航海で消費される燃料を最小化することによって排ガスを

^{*1} 新技術創成研究所 客員研究員

抑制する精密な航海最適化技術について考察した。さらに、航路保持の下で目的地までの主機出力を最適に配分するための速力の決定方程式を導き、上記(1)～(3)の条件に対して安全な解を得るためにリミッタを用いて決定方程式を解く方法(リミッタ法)を提案した。

本稿では、決定方程式の解が運航の危険域内に存在する場合に、リミッタの代わりにペナルティを課して安全な解を求める方法(ペナルティ法)を導入し、数値シミュレーションによって両解法の特性を評価する。

2. 航海最適化技術²⁾

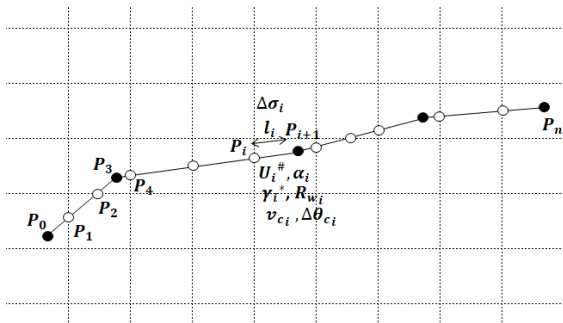
2.1 就航環境の離散値化

Fig.1 に示す気象海象予報データサービスの単位となる矩形の海域と、航路およびその変針点によって区分される航路要素 $\Delta\sigma_i$ ($i = 1 \cdots n$) 上では、すべての就航条件が一定となる。したがって、航路要素を基本単位として目的地に至るまでの航海の速力、即ち、主機出力の最適な配分が可能となる。

2.2 海流下の対地船速

実際の航海では潮流や海流の影響を受けるため、航路を保持して航海するためには針路補正が必要になる。

Fig.2 に示す通り、潮流や海流の流速を v_{ci} 、その流向と設定航路の方位との偏差(流向偏差)を $\Delta\theta_i$ とすると、対地船速 U^*_i および針路補正值 $\Delta\phi_i$ とこれらの状態量の間には以下の関係式が成り立つ。



l_i : 航路要素長 ($P_i \rightarrow P_{i+1}$)、 R_{wi} : $\Delta\sigma_i$ 上の波浪抵抗
 $U_i^{\#}$: $\Delta\sigma_i$ 上の船速、 α_i : $\Delta\sigma_i$ 上の波浪による自然減速係数
 γ_i^* : $\Delta\sigma_i$ 上の燃量消費量(伝達&推進効率による補正值)
 R_{wi} : $\Delta\sigma_i$ 上の潮流や海流の流速
 $\Delta\theta_i$: $\Delta\sigma_i$ 上の設定方位に対する潮流や海流の流向の偏差

Fig.1 航路要素

$$U^*_i = \alpha_i U_i \cos \Delta\phi_i + v_{ci} \cos \Delta\theta_i \quad (1)$$

$$\Delta\phi_i = \sin^{-1} \frac{v_{ci} \sin \Delta\theta_i}{\alpha_i U_i} \quad (2)$$

また、(1)式より、対水運動対応の実航程と航路要素長の航程比 ζ_i および潮流や海流に対処する針路補正後の相対波向 χ_i^* が、以下の通り表される。

$$\zeta_i = \frac{1}{\cos \Delta\theta_i + v_{ci} \cos \Delta\theta_i / (\alpha_i U_i)} \quad (3)$$

$$\chi_i^* = \chi_i + \Delta\phi_i \quad (4)$$

但し、 χ_i は航路要素 $\Delta\sigma_i$ に対する相対波向である。

2.3 総燃料消費量の定式化

船舶の推進運動方程式と主機の燃料消費率から、波浪と潮流や海流を考慮した船舶運航の総燃料消費量(第二評価関数 J_2) を定式化することができる。第二評価関数 J_2 は、操縦運動の状態量で構成される第一評価関数 J_{1i} をその一部に含む重構造を持つ²⁾。

$$J_{1i} = \int_0^\infty \left(\frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2\alpha_i^2} + \frac{(m'_0 + m'_y)\beta}{C_{h_i'}} \frac{r' + C_{\delta_i'} \delta^2}{C_{h_i'}} \right) dt' \quad (5)$$

- $\Delta\psi$: 針路と設定針路の偏差
- r : 回頭角速度 β : 横流れ角
- δ : 操舵量(舵角)
- m_0 : 質量 m_y : 付加質量(横方向)
- C_h : 船体抵抗係数 C_δ : 舵抵抗係数

$$J_2 = \sum [\gamma_i^* C_{h_i} U_i^2 (\zeta_i l_i + \alpha_i^2 L J_{1i})] \quad (6)$$

- U : 速力 L : 船体長
- γ^* : 動力系の効率で補正された燃料消費率

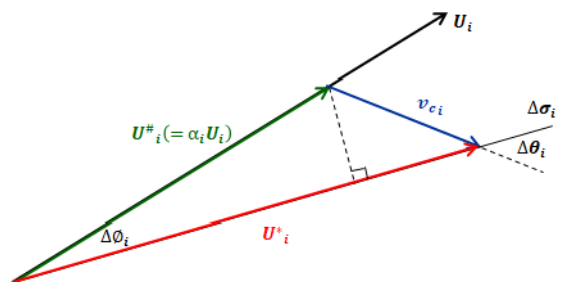


Fig.2 潮流補正

但し、各々の式の中の添え字「 i 」は航路要素 $\Delta\sigma_i$ 上の状態量であることを、また、第一評価関数 J_{1i} の「 i 」は、無次元化された量であることを示す。

2.4 最適速力の決定方程式

航路要素毎の最適速力は、総航海時間 T_v を拘束して航海の定時性を確保した上で、総燃料消費量（第二評価関数）を最小化することによって求められる。

$$\sum \frac{\zeta_i l_i}{\alpha_i U_i} = T_v \quad (7)$$

T_v : 総航海時間（拘束条件）

状態量 X の速力 U による偏微分を

$$X_U \equiv \frac{\partial X}{\partial U} \quad (8)$$

と表記して、(6)式に λ を未定係数とするラグランジュの未定係数法を適用することにより、最適速力 U_i の精密な決定方程式が、(7)式と合わせた $(n+1)$ 元連立方程式として以下の通り導かれる²⁾。

$$\begin{aligned} & \{C_{hi}[\alpha_i^2 (\gamma_{U_i}^* U_i + 2\gamma_i^*) \zeta_i l_i \\ & + \alpha_i^3 \{ \gamma_{U_i}^* \alpha_i U_i + 2\gamma_i^* (1 - \Delta U_{U_i}) \} L_{J_{1i}}^{opt} \\ & + \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (\alpha_i^2 L_{J_{1U_i}}^{opt} + \zeta_{U_i} l_i)] \\ & + C_{h_{U_i}} \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (\zeta_i l_i + \alpha_i^2 L_{J_{1i}}^{opt}) \} U_i^3 \\ & = \{ (1 - \Delta U_{U_i}) \zeta_i - \alpha_i U_i \zeta_{U_i} \} l_i \lambda \quad (9) \end{aligned}$$

3. 航海の制約条件を考慮した速力（主機出力）最適化

本章では、潮流や海流に加えて主機の能力限界や危険回転域、荒天時の運航限界に対処可能な航海最適化技術について考察する。

特に、先行研究²⁾では、これらの非線形条件への対処法としてリミッタ法を採用したが、本稿では、ペナルティ関数を導入して決定方程式を微調整する新たな解法を導く。

(9)式左辺の U_i^3 の係数を F_{bi} 、右辺の λ の係数を G_{ci} とおくと、決定方程式(9)は次式のように表される。

$$F_{bi} U_i^3 = G_{ci} \lambda \quad (10)$$

$$\begin{aligned} F_{bi} = & C_{hi} [\alpha_i^2 (\gamma_{U_i}^* U_i + 2\gamma_i^*) \zeta_i l_i \\ & + \alpha_i^3 \{ \gamma_{U_i}^* \alpha_i U_i + 2\gamma_i^* (1 - \Delta U_{U_i}) \} L_{J_{1i}}^{opt} \\ & + \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (\alpha_i^2 L_{J_{1U_i}}^{opt} + \zeta_{U_i} l_i)] \\ & + C_{h_{U_i}} \gamma_i^* \alpha_i^2 U_i (\zeta_i l_i + \alpha_i^2 L_{J_{1i}}^{opt}) \quad (11) \end{aligned}$$

$$G_{ci} = \{ (1 - \Delta U_{U_i}) \zeta_i - \alpha_i U_i \zeta_{U_i} \} l_i \quad (12)$$

(10)、(7)式からなる連立方程式は、海象条件や総航海時間の指定によっては、最適速力として、一部または全ての航路要素で、主機の能力や運航限界速力³⁾対応の主機出力を超える解、或いは、危険回転域内の解を与える可能性がある。これらの危険運転域と安全運転域の主機出力の境界値を P_{bnd_i} として、安全確保未達の度合いに応じたペナルティ関数

$$F_{pi} = \begin{cases} 0 & (P^*_i \in [\text{安全運転域}]) \\ \frac{1}{\eta_t \eta_p} C_{hi} G_{ci} \lambda \left(1 + \frac{\alpha_i^2 L}{\zeta_i l_i} J_{1i}^{opt} \right) - F_{bi} & (P^*_i \in [\text{危険運転域}]) \end{cases} \quad (13)$$

を定義し、(10)式を、その一部にペナルティを付加した以下の決定方程式に置き替える。

$$(F_{bi} + F_{pi}) U_i^3 = G_{ci} \lambda \quad (14)$$

一方、(6)、(7)式の ζ_i 、 l_i と、基準航海および理想航海³⁾の船速 $U^{\#}_i$ 、 U_i とそれぞれの航海時間 $T^{\#}_i$ 、 T_i の間に以下の等価関係

$$\zeta_i l_i = U^{\#}_i T^{\#}_i = (\alpha_i U_i) \left(\frac{T_i}{\alpha_i} \right) = U_i T_i \quad (15)$$

が成り立つことを考慮すると、(6)式より、実航海の主機出力 P^*_i が次式の通り導かれる。

$$P^*_i = \frac{1}{\eta_t \eta_p} C_{hi} U_i^3 \left(1 + \frac{\alpha_i^2 L}{\zeta_i l_i} J_{1i}^{opt} \right) \quad (16)$$

η_t : 伝達効率、 η_p : 推進効率

(14)式と(7)式からなる(n+1)元連立方程式が、新たな決定方程式となる(ペナルティ法)。

尚、未定係数λの値は、(3)、(7)および(14)式を用いて反復計算によって収束させる。

ペナルティ法では、決定方程式の求解の各過程において収束途中の解が危険運転域内にある場合に、境界値からの乖離の大きさに基づいてペナルティが計算され、大域的収束計算²⁾の次のサイクルの反復計算に供される。その結果、ペナルティ自身も大域的収束計算の中で収束させることが可能となる。

因みに、主機出力の解が危険運転域との境界値として計算された場合の速力 U_i は、 C_{hi} 、 α_i 、 ζ_i 、 J_{1i}^{opt} が速力 U_i に依存することに留意して、次式から逆算しなければならない。

$$\frac{1}{\eta\eta_p} C_{hi} U_i^3 \left(1 + \frac{\alpha_i^2 L}{\zeta_i} J_{1i}^{opt}\right) = P_{bnd_i} \quad (17)$$

決定方程式(14)に示す微調整の結果、これらの方程式から導かれた速力 U_i は、第二評価関数(総燃料消費量)を最小化するという本来の目的に対しては、最適解ではなく準最適解となることに注意を要する。

ペナルティ関数(13)式の導出過程および各々の制約条件に対応する境界値 P_{bnd_i} の計算を付章に示す。

4. 数値シミュレーション

4.1 シミュレーション条件

先行研究²⁾のリミッタ法による数値シミュレーションと同一の条件の下で、ペナルティ法による決定方程式

Table 1 コンテナ船主要目

要素	アイテム	記号	単位	値
船体	船長	L	m	175.00
	船幅	B	m	25.40
	吃水	d	m	9.500
	排水容積	∇	m ³	24.154
	ブロック係数	C _b	-	0.572
舵	舵面積	A _R	m ²	33.0376
	舵高	H _R	m	7.7583
	アスペクト比	λ	-	1.8219
プロペラ	直径	D	m	6.533
	ピッチ	p		1.009
	ブレード数			5
動力系統	サービス速力	U _s	kt	22.5
	主機出力(MCR)	P _{mcr}	ps	27,500

の解を求め、両解法の結果を比較・評価した。

Table 1 に供試船の主要目^{5),6)}を、また、Table 2 に航路と波浪条件を示す。海流については、航路との流向偏差30度の順方向で0.2ktの流速とした²⁾。

さらに、航海の制約条件として以下の4ケースについて、総燃料消費量と危険運転防止のための主機出力を試算し、比較した。

- (1) ケース1 : 主機出力超過防止
- (2) ケース2 : 危険回転域回避
- (3) ケース3 : 運航限界速力超過防止
- (4) ケース4 : 運航限界速力対応の主機出力が危険回転域内にある複合条件

各ケースを成り立たせるために、先行研究²⁾の航海条件の一部をそれぞれ変更した個別の条件をTable 3に示す。

尚、計算は倍精度浮動小数点で行い、収束計算の収束判定基準はすべて「相対誤差10⁻⁸未満」とした。

Table 2 航海条件

航路要素	変針角(deg)	航程(ml)	有義波高(m)	相対波向(deg)	流速(kt)	相対流向(deg)
房総沖	0.0	568.0	1	150	0.2	30
1	6.4	500.1	4	-45	0.2	30
2	6.9	452.0	2	-170	0.2	30
3	7.2	421.0	1	80	0.2	30
4	7.4	405.2	3	30	0.2	30
5	7.4	403.3	4	120	0.2	30
6	7.4	415.1	5	160	0.2	30
7	7.3	441.6	4	-135	0.2	30
8	7.0	484.7	2	-90	0.2	30
9	2.0	447.0	3	60	0.2	30
S.F.沖						
計		4538.1				

Table 6 ケース 3 (運航限界速力超過防止)

航海時間 設定(hr)	204.00		主機出力 最大(ps)		27500		主機能力 処理法	燃料消費量 (t)	実航海時間 (hr)	流速 (kt)	流向偏差 (deg)	主機能力 処理法	燃料消費量 (t)	実航海時間 (hr)	流速 (kt)	流向偏差 (deg)
航路要素	変針角 (deg)	航程 (ml)	有義波高 (m)	相対波向 (deg)	ペナルティ法	586.647	204.00	0.2	30.0	リミッタ法	586.648	204.00	0.2	30.0		
					針路補正 (deg)	主機出力 (ps)	実船速 (kt)	操舵制御ゲイン (k1 k2)		針路補正 (deg)	主機出力 (ps)	実船速 (kt)	操舵制御ゲイン (k1 k2)			
房総沖(0)	0.000	568.0	1	150	-0.252	24089	22.73	0.195	9.809	-0.252	24090	22.73	0.195	9.809		
1	6.391	500.1	4	-45	-0.251	27119	22.86	0.199	9.738	-0.251	27119	22.86	0.199	9.738		
2	6.877	452.0	2	-170	-0.252	24198	22.73	0.196	9.807	-0.252	24198	22.73	0.196	9.807		
3	7.193	421.0	1	80	-0.252	24106	22.73	0.195	9.809	-0.252	24106	22.73	0.195	9.809		
4	7.375	405.2	3	30	-0.251	25790	22.79	0.198	9.774	-0.251	25790	22.79	0.198	9.774		
5	7.442	403.3	6	0	-0.340	18749	16.83	0.225	13.437	-0.340	18749	16.83	0.225	13.437		
6	7.405	415.1	5	160	-0.252	25517	22.78	0.197	9.780	-0.252	25517	22.78	0.197	9.780		
7	7.257	441.6	4	-135	-0.252	24913	22.75	0.197	9.794	-0.252	24913	22.75	0.197	9.794		
8	6.982	484.7	2	-90	-0.252	24265	22.73	0.196	9.806	-0.252	24265	22.73	0.196	9.806		
9	1.967	447.0	3	60	-0.252	25183	22.76	0.197	9.788	-0.252	25183	22.76	0.197	9.788		
S.F.沖(10)																

Table 7 ケース 4 (複合条件)

航海時間 設定(hr)	204.00		主機出力 最大(ps)		27500		主機能力 処理法	燃料消費量 (t)	実航海時間 (hr)	流速 (kt)	流向偏差 (deg)	主機能力 処理法	燃料消費量 (t)	実航海時間 (hr)	流速 (kt)	流向偏差 (deg)
航路要素	変針角 (deg)	航程 (ml)	有義波高 (m)	相対波向 (deg)	ペナルティ法	586.781	204.00	0.2	30.0	リミッタ法	586.781	204.00	0.2	30.0		
					針路補正 (deg)	主機出力 (ps)	実船速 (kt)	操舵制御ゲイン (k1 k2)		針路補正 (deg)	主機出力 (ps)	実船速 (kt)	操舵制御ゲイン (k1 k2)			
房総沖(0)	0.000	568.0	1	150	-0.252	24103	22.73	0.195	9.807	-0.252	24103	22.73	0.195	9.807		
1	6.391	500.1	4	-45	-0.251	27133	22.86	0.199	9.736	-0.251	27133	22.86	0.199	9.736		
2	6.877	452.0	2	-170	-0.252	24211	22.74	0.196	9.805	-0.252	24211	22.74	0.196	9.805		
3	7.193	421.0	1	80	-0.252	24119	22.73	0.195	9.807	-0.252	24119	22.73	0.195	9.807		
4	7.375	405.2	3	30	-0.251	25804	22.79	0.198	9.772	-0.251	25804	22.79	0.198	9.772		
5	7.442	403.3	6	0	-0.341	18700	16.81	0.225	13.459	-0.341	18700	16.81	0.225	13.459		
6	7.405	415.1	5	160	-0.252	25530	22.78	0.197	9.778	-0.252	25530	22.78	0.197	9.778		
7	7.257	441.6	4	-135	-0.252	24927	22.76	0.197	9.792	-0.252	24927	22.76	0.197	9.792		
8	6.982	484.7	2	-90	-0.252	24279	22.74	0.196	9.804	-0.252	24279	22.74	0.196	9.804		
9	1.967	447.0	3	60	-0.252	25196	22.77	0.197	9.786	-0.252	25196	22.77	0.197	9.786		
S.F.沖(10)																

4.3 シミュレーション結果の分析

Table 4 ~ Table 7 から、ペナルティ法とリミッタ法について以下の特徴が読み取れる。

- (1) 決定方程式の解が危険運転域内にある場合、リミッタ法では制約条件の拘束を受けて解が安全運転域との境界上に決定される。
- (2) ペナルティ法では、決定方程式の解がケース 3 の航路要素 5 でリミッタ法と同様に境界上に求まるが、それ以外は全て安全運転域内に決定 (青色表示) され、より安全な解が得られる。
- (3) いずれの解法も、主機出力の解が危険運転域内に決定 (赤色表示) されることはない。

さらに、リミッタ法で安全運転域と危険運転域の境界上に解が存在する場合について、それぞれの解法による総燃料消費量と主機出力を比較した。

両解法の計算結果とその差の割合を、Table 8 と Table 9 に示す。

- (4) Table 8 のケース 1 と 2 では、リミッタ法の方がペナルティ法より総燃料消費量が少ない。逆に、ケース 3 と 4 ではペナルティ法の方が省燃費である。何れの場合もその差の割合は 10^{-7} ~ 10^{-5} のオーダーで僅少である。
- (5) また、Table 9 では、ケース 3 を除いて、主機出力の解にも両解法の間に違いが認められるが、その差の割合も 10^{-3} 以下のオーダーで小さい。
- (6) 特に、Table 7 (ケース 4) では、全項目について両解法の表示値に差が認められない。しかしながら下位の桁で僅差があり、その結果、リミッタ法とペナルティ法の間で航路要素 5 の主機出力の表示色が異なっている。

Table 8 解法比較 (総燃料消費量)

ケース	ペナルティ法(P)	リミッタ法(L)	(P-L)/L
1	624.06	624.04	2.31E-05
2	378.67	378.67	6.59E-07
3	586.65	586.65	-1.04E-06
4	586.78	586.78	-7.73E-07

(7) 以上の結果、両解法が与える準最適解には数値的には実用上の差はなく、有用性は同等と考えられる。

尚、収束計算における数値計算上の累積誤差の影響を評価するために、補助的に収束判定条件を「相対誤差 10^{-12} 未満」に変更して再計算した。その結果、収束するまでの反復回数は1.5～1.7倍に増加したが、Table 8の表示値に変化はなかった。

5. まとめ

近年、海洋気象学の進歩とスーパーコンピュータの出現によって、大洋の波浪予報および海流予報の予報期間の延伸や予報可能海域の拡大、予報精度が地球規模で向上している⁷⁾。

本稿では、実航海において、海象予報に適応して航海の最適化を計る速力の決定方程式の解法について検討した。特に、先行研究²⁾の非線形な制約条件をリミッタで処理する方法(リミッタ法)に対して、ペナルティ関数を導入して処理する方法(ペナルティ法)を提案し、その具体的な関数形を提示した。

リミッタ法は、危険運転域内に求まった主機出力の解を安全運転域との境界値に置き替え、固定端として残りの航路要素で最適化を計る。一方、ペナルティ法は、解と境界値の差に基づいて定式化されたペナルティ関数によって決定方程式そのものを微調整しながら、境界条件を自由端として全航路要素を対象に解を収束させる手法である。

したがって、制約条件への対処法の考え方は両解法の間で根本的に異なる。

最後に、数値シミュレーションによって両解法を比較した結果、実用的には同等であることが明らかとなった。但し、ペナルティ法では、ある反復過程で解が危険運転域内に求まるとその程度に応じてペナルティ

Table 9 解法比較 (主機出力)

ケース	航路要素	ペナルティ法(P)	リミッタ法(L)	(P-L)/L
1	1	27445	27500	-2.00E-03
	4	27433	27500	-2.43E-03
	6	27431	27500	-2.53E-03
2	5	11266	11275	-7.62E-04
	7	11267	11275	-7.52E-04
	9	11552	11550	2.15E-04
3	5	18749	18749	0.00E+00
4	5	18700	18700	-2.48E-06

が計算され、次のステップの計算で解を安全運転域の方に引き戻す力が働くので、リミッタ法に比べ、より安全運転域内に解が収束するという特徴を有する。

参考文献

- 1) 報道発表資料、報道・広報、国土交通省ホームページ
- 2) 金丸：実航海の自然条件や動力系の制約に対処可能な船舶の航海最適化技術、長崎総合科学大学紀要(2018)第58巻、第1号 p. 55-65
- 3) 金丸：船舶の航海最適化技術の精密化とオンボード航海支援装置への適用のための処理効率化、長崎総合科学大学紀要(2017)第57巻、第1号 p. 45-60
- 4) 萩原、巻島：最適航路に関する考察、日本航海学会論文集(1980)62号 p. 77-88
- 5) 北沢、黒井、高木：コンテナ船の波浪中での限界速度、日本造船学会論文集、第138号(1975) p. 269-276
- 6) 孫、野本：高速コンテナ船の操縦運動と横揺れの連成挙動について、日本造船学会論文集、第150号(1981) p. 232-244
- 7) (財)気象業務支援センター ホームページ オンライン気象情報

付章 ペナルティ関数

(14)式より得られる次の関係式

$$U_i^3 = \frac{G_{ci}}{F_{bi} + F_{pi}} \lambda \tag{18}$$

を(16)式に代入すると次式が得られる。

$$P^*_i = \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{hi} \frac{G_{ci}}{F_{bi} + F_{pi}} \lambda \left(1 + \frac{\alpha_i^2 L}{\zeta_i L_i} J_{1i}^{opt} \right) \quad (19)$$

決定方程式から得られる主機出力の解が危険運転域内にある場合は、安全運転域との境界値 P_{bnd_i} を用いて

$$P^*_i = P_{bnd_i} \quad (P_{bnd_i} < P^*_i) \quad (20)$$

とおき、(19)式に代入して整理すると、

$$F_{p_i} = \frac{\frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{hi} G_{ci} \lambda \left(1 + \frac{\alpha_i^2 L}{\zeta_i L_i} J_{1i}^{opt} \right)}{P_{bnd_i}} - F_{b_i} \quad (21)$$

一方、主機出力が安全運転域内にある場合は、

$$F_{p_i} = 0 \quad (P^*_i \leq P_{bnd_i}) \quad (22)$$

とおく。

(13)式のペナルティ関数は、(21)式と(22)式の組み合わせである。但し、 P_{bnd_i} は、 P^*_i の値に基づいて以下の通り定義する。

(1) 主機能力の限界 P_{mcr} を超過した場合

$$P_{bnd_i} = P_{mcr} \quad (P_{mcr} < P^*_i) \quad (23)$$

(2) 危険回転域回避を要する場合

危険回転域の下端を P_{hzdL} 、上端を P_{hzdH} 、その中間値を P_{hzdM} として、

$$P_{bnd_i} = \begin{cases} P_{hzdL} & (P_{hzdL} < P^*_i < P_{hzdM}) \\ P_{hzdH} & (P_{hzdM} \leq P^*_i < P_{hzdH}) \end{cases} \quad (24)$$

$$P_{hzdM} = \frac{P_{hzdL} + P_{hzdH}}{2} \quad (25)$$

(3) 運航限界速力を超過した場合

運航限界速力^{2),4)} U_{noli} に対応する主機出力を $P_{noli}^{2)}$ とし、 P_{noli} に主機能力超過防止および危険回転域回避のためのリミッタ処理を行う。即ち

$$P_{noli} = P_{mcr} \quad (P_{mcr} < P_{noli}) \quad (26)$$

$$P_{noli} = P_{hzdL} \quad (P_{hzdL} < P_{noli} < P_{hzdH}) \quad (27)$$

その上で、 P^*_i が P_{noli} を超過した場合に P_{bnd_i} を以下の通り決定する。

$$P_{bnd_i} = P_{noli} \quad (P_{noli} < P^*_i) \quad (28)$$

大域的収束計算では、各反復過程で計算された速力を用いて(13)式のペナルティを再計算し、次の反復過程の決定方程式(14)に供する。その結果、速力とペナルティの両方が同時に収束し、ペナルティ法による航海最適化問題の準最適解を決定することができる。