

【複合新領域】

研究論文

船舶の航海最適化技術の改良

金丸 英幸*¹

Improvement of Navigation Optimization Technologies in ships

KANAMARU Hideyuki

Summary

Various endeavors for environmental protection are continuing in many fields of industry.

The author has approached this problem by developing new technologies for minimizing fuel oil consumption to reduce exhaust gases over the navigation routes in marine transportation.

In the preceding studies, the relationship between speed drop caused by waves and wave resistance was made clear quantitatively in the case that the work of thrust to navigate straight over a definite distance is the same between calm sea and wave conditions. Moreover the amount of fuel oil consumption was analyzed to distribute the main engine outputs optimally on the basis of this relationship.

In this paper, the above relationship was formulated more strictly in the case that ships navigate under wave conditions with the same main engine output as under calm sea conditions to analyze fuel oil consumption, and the decision equations for optimal steering and distribution of main engine outputs are modified.

Finally, the effectiveness of the results of this study is evaluated in comparison with preceding studies through several cases of numerical simulation.

Keywords : (optimal navigation, steering control, main engine output, fuel consumption, penalty function)

1. 緒言

国際問題として環境保全が取り上げられて久しい。海運界においても、海上輸送における有害な大気汚染物質の排出を21世紀中にゼロにする目標が国際海事機関 (IMO) で合意される等、環境保護への積極的な取り組みが加速している。

筆者は、船舶の運航で消費される燃料消費量を最小化することによって、排ガスの発生量を抑制する技術について研究を進めてきた。

燃料消費量に影響する要素として船体抵抗や波浪抵抗等があり、波浪中の航海では波浪抵抗による自然減

速が発生する。その特性を解析するためには、完全静水中と波浪中で主機の運転状態を同じにしなければならない。

主機の発熱量が最終的に推進運動の仕事量にエネルギー変換されるため、従来の研究^{1)~4)}では主機の運転状態として「一定の距離の推進運動の仕事量」を取り上げ、波浪中と完全静水中で推進運動の仕事量が同一という前提の下に、波浪による自然減速係数と波浪抵抗の関係を明らかにして燃料消費量を解析した。

一方、主機の燃料消費は単位馬力・単位時間当りの燃料消費量に依存する。本研究では、先行研究^{1)~4)}を

*¹ 大学院 非常勤講師 / 新技術創成研究所 客員研究員

レビューかつ整理しながら、主機の運転状態として「主機出力（制動馬力）」を取り上げ、完全静水中と同じ主機出力（制動馬力）で波浪中を航海する時の自然減速係数と波浪抵抗の関係を明らかにする。その上で、総燃料消費量をより厳密に解析し、目的地までの主機出力配分の最適解を与える決定方程式の見直しを行う。

最後に、数値シミュレーションによって、本研究と先行研究について、それぞれ決定された最適な操舵制御と主機出力制御が総燃料消費量削減に寄与する度合を比較・評価する。

2. 航海最適化技術の基礎

2.1 航海モデル

航海における燃料消費量を段階的に解析するために、以下の3通りの航海モデルを定義する。

(1) 理想航海（架空）

『完全静水中で、舵を中央に固定しても船首揺を生じず、設定された針路に向けて直進する航海』

理想航海の船速を u とすると u は速力に相当し、主機出力の指標となるパラメータと考えることができる。理想航海の航海時間を T で表す。

(2) 基準航海（架空）

『波浪下で、舵を中央に固定しても船首揺を生じず、設定された針路に向けて直進する航海』

基準航海の船速を $u^\#$ とすると $u^\#$ は波浪抵抗によって減速された船速で、自然減速係数 α を用いて以下の通り表される。

$$u^\# = \alpha u \quad , \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (1)$$

また、基準航海の航海時間を $T^\#$ で表すと、

$$T^\# = \frac{T}{\alpha} \quad (2)$$

である。

因みに、萩原ら⁵⁾が示した波浪下の航海における自然減速特性から、自然減速係数 α は有義波高に対して単調減少、かつ、有義波高固定の下で

は、船首方向を基準とした相対波向に対して単調増加の傾向にあることが分かる。

(3) 実航海

『波浪や海流の作用を受け、主機能力や主推進軸系の危険回転域、荒天下の運航限界速力等の制約の下で、操舵による操縦（船首揺）運動を伴いながら基準航海の船速 $u^\#$ で航行する航海』

実航海の航海時間を T^* 、基準航海との時間差を ΔT^* で表す。即ち

$$T^* = T^\# + \Delta T^* \quad (3)$$

以降、基準航海および実航海の状態量は、それぞれ右肩に「#」と「*」を付して記す。

2.2 推進運動モデル

実航海における推進運動は以下の運動方程式で表され、船舶の航海最適化の基礎となる。

$$(m_0 + m_x)u^\# - (m_0 + m_y)vr = T_p^*(1 - t_p^*) - C_h^\# u^{\#2} - C_\delta^\# u^{\#2} \delta^2 - R_w \quad (4)$$

r : 回頭角速度、 v : 横流れ速度

δ : 舵角、 R_w : 波浪抵抗

m_0 : 質量、 m_x, m_y : 付加質量

T_p : スラスト、 t_p : スラスト減少率

さらに、船体抵抗係数 C_h と舵抵抗係数 C_δ は次式で与えられる³⁾。尚、 $C_h^\#$ と $C_\delta^\#$ は実航海（基準航海）対応の船体抵抗係数と舵抵抗係数、 T_p^* と t_p^* は実航海対応のスラストとスラスト減少率である。

$$C_h = \{C_w + (1 + \kappa)C_f'\} \nabla_a^{2/3} \quad (5)$$

C_w : 波浪抵抗係数、 C_f' : 摩擦抵抗係数

∇_a : 排水容積、 κ : 形状影響係数

$$C_\delta = \frac{\rho}{2} (1 - \omega)^2 (1 + 3.6s_p^{1.5}) A_R \frac{6.13\lambda_R}{\lambda_R + 2.25} \quad (6)$$

$$s_p = 1 - \frac{u^\#(1-\omega)}{np} \quad (7)$$

s_p : スリップ比

ρ : 海水密度、 ω : 伴流係数

A_R : 舵面積、 λ_R : 舵アスペクト比

2.3 燃料消費量

船舶の燃料消費量は、主機出力（制動馬力） P_s の関数となる燃料消費率（単位馬力・単位時間当たりの燃料消費量） $\gamma_o(P_s)$ を用いて計算することができる。燃料消費率を主推進軸系の伝達効率 η_t と推進効率 η_p を用いて補正した量を γ とすると、

$$\gamma = \frac{\gamma_o(P_s)}{\eta_t \eta_p} \quad (8)$$

通常、船舶は一定の距離を一定の船速 U ($U^\#$) で直進しながら運航されることを考慮すると、(4)式より、実航海における燃料消費量 F^* が以下の通り定式化される。但し、 β は、横流れ角である。

$$\begin{aligned} F^* &= \int_0^t \gamma T_p^* (1 - t_p^*) U^\# dt \\ &= \int_0^t \gamma \{ C_h^\# U^{\#3} + (m_0 + m_y) U^{\#2} \beta r \\ &\quad + C_\delta^\# U^{\#3} \delta^2 + R_w U^\# \} dt \quad (9) \end{aligned}$$

$$\beta = -\frac{v}{U^\#} \quad (10)$$

2.4 波浪抵抗と自然減速係数の定量的関係

基準航海では、理想航海と同じ主機出力（制動馬力）で主機を運転しても波浪抵抗のために自然減速が発生する。主機出力が同一の場合は両航海における燃料消費率も同一で、その燃費特性は主機で決まる。

船舶の推進に寄与する馬力（有効馬力）は、推力 $T_p^* (1 - t_p^*)$ と船速 $u^\#$ の積となるので、航海の基本が定速直進 ($u^\# = 0$) であることと 2.1 節の各航海モデルの定義を考慮すると、有効馬力を主推進軸系の伝達効率 η_t と推進効率 η_p で除算することによって、(4)式より理想航海と基準航海および実航海の主機出力（制動馬力）が、それぞれ

$$P_s = \frac{1}{\eta_t \eta_p} C_h U^3 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_s^\# &= \frac{1}{\eta_t \eta_p} (C_h^\# U^{\#3} + R_w U^\#) \\ &= \frac{\alpha}{\eta_t \eta_p} (\alpha^2 C_h^\# U^3 + R_w U) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_s^* &= \frac{1}{\eta_t \eta_p} \{ C_h^\# U^{\#3} + (m_0 + m_y) U^{\#2} \beta r \\ &\quad + C_\delta^\# U^{\#3} \delta^2 + R_w U^\# \} \quad (13) \end{aligned}$$

と表される。

したがって、理想航海と基準航海の主機出力が同一という条件から、(11)、(12)式より自然減速係数 α と波浪抵抗 R_w の関係が以下の通り定量化される。

$$\frac{C_h^\# + R_w / (\alpha U)^2}{C_h} = \frac{1}{\alpha^3} \quad (14)$$

2.5 潮流（海流）下の対地船速

実際の航海では潮流や海流の影響を受けるため、航路を保持して航海するためには針路補正が必要になる。

Fig. 1 に示す通り、潮流や海流の流速を v_c 、その流向と設定航路の方位との偏差（流向偏差）を $\Delta\theta$ とすると、対地船速 $U_g^\#$ および針路補正值 $\Delta\phi$ とこれらの状態量の間には以下の関係式が成り立つ。

$$U_g^\# = \alpha U \cos \Delta\phi + v_c \cos \Delta\theta \quad (15)$$

$$\Delta\phi = \sin^{-1} \frac{v_c \sin \Delta\theta}{\alpha U} \quad (16)$$

また、航路保持の航海において、潮流や海流の有無に対応するそれぞれの航程の比 ζ および潮流や海流に対処する針路補正後の相対波向 $\chi^\#$ が、以下の通り表される。但し、 χ は設定航路の方位に対する波浪の相

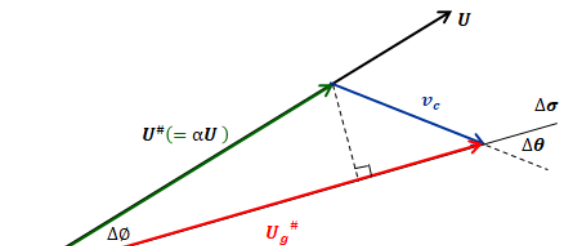


Fig.1 潮流補正

対波向である。

$$\zeta = \frac{U^\#}{U_g^\#} = \frac{1}{\cos \Delta\theta + v_c \cos \Delta\theta / (\alpha U)} \quad (17)$$

$$\chi^\# = \chi + \Delta\theta \quad (18)$$

2.6 実航海と基準航海の時間差

実航海では船首揺運動に伴って航程が増大する。したがって、基準航海に比べて航海時間も増大し、その時間差 ΔT^* が次式で与えられる。

$$\Delta T^* = \int_0^{T^\#} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \quad (19)$$

$$\Delta\psi = \psi - \psi_s \quad : \text{針路偏差} \quad (20)$$

ψ : 針路

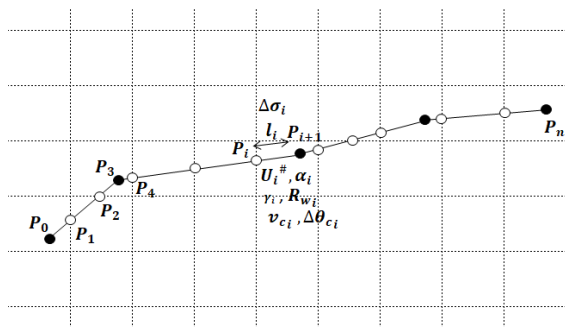
ψ_s : 設定針路

$$\Delta T^* = T^* - T^\# \quad (21)$$

(19)式の導出過程を付章1に示す。

3. 就航環境の離散化

一般に、船舶の運航は一定の速力 U による直進が基本であることを考慮すると、航路が Fig.2 に示す気象海象予報データサービスの単位となる矩形の海域と変針点によって分割される航路要素 $\Delta\sigma_i$ ($i = 1 \cdots n$) 上では、波浪や船速、自然減速係数等の推進性能に係



- l_i : 航路要素長 ($P_i \rightarrow P_{i+1}$)、 R_{wi} : $\Delta\sigma_i$ 上の波浪抵抗
- $U_i^\#$: $\Delta\sigma_i$ 上の船速、 α_i : $\Delta\sigma_i$ 上の波浪による自然減速係数
- γ_i : $\Delta\sigma_i$ 上の燃量消費量 (伝達&推進効率による補正值)
- R_{wi} : $\Delta\sigma_i$ 上の潮流や海流の流速
- $\Delta\theta_i$: $\Delta\sigma_i$ 上の設定方位に対する潮流や海流の流向の偏差

Fig.2 航路要素

る就航条件や船舶の運転状態量が一定となる。

航海の総燃料消費量は各航路要素の燃料消費量の合算となるので、就航条件や船舶の運転状態量が一定となる航路要素を基本単位として、操舵制御の最適化および目的地に至るまでの航海の速力、即ち、主機出力を最適に配分することが可能となる。

尚、以降、航路要素 $\Delta\sigma_i$ における就航条件や船舶の運転状態量には添え字「 i 」を付けて表す。

4. 航海最適化技術

4.1 総燃料消費量の定式化

航路要素 $\Delta\sigma_i$ では推進性能に係る就航条件や船舶の運転状態量が一定であることを考慮すると、始点と終点の通貨時刻を t_i 、 t_{i+1} として、(9)式の燃料消費量を各航路要素の燃料消費量の加算形式に変換することにより、航海全体の総燃料消費量 F_{σ}^* が定式化される。

$$F_{\sigma}^* = \sum \gamma_i [(C_{h_i}^\# U_i^\#{}^3 + R_{w_i} U_i^\#) T_i^* + \int_0^{T_i^*} \{ (m_0 + m_y) U_i^\#{}^2 \beta r + C_{\delta_i}^\# U_i^\#{}^3 \delta^2 \} dt] \quad (22)$$

$$T_i^* = t_{i+1} - t_i \quad (23)$$

実航海 (基準航海) における航路要素 $\Delta\sigma_i$ の航海時間 T_i^* ($T_i^\#$) は、船舶の操縦性能の時定数 T_S より十分大きいので(22)式[]内第2項の積分の上限を

$$T_i^* (T_i^\#) \rightarrow \infty \quad (24)$$

として扱うことができる。また、厳密には、基準航海の航海時間 $T_i^\#$ は次式で表される。

$$T_i^\# = \frac{\zeta l_i}{U_i^\#} = \frac{\zeta l_i}{\alpha_i U_i} \quad (25)$$

さらに、大型船の場合、ビューフォート風力階級6以下の海象条件下では、適切に調整されたオートパイロットによる保針制御によって、微小舵角で十分な保針性能が発揮されることが航海の現場で知られている。

$$|\Delta\psi - \beta| \ll 1, \quad |\delta| \ll 1 \quad (26)$$

(22)式から波浪抵抗（外乱要素） R_{wi} を除去するために、自然減速係数と波浪抵抗の定量的関係(14)式を適用して [] 内第1項の () 部分を C_{hi} と U_i で表し、実航海と基準航海の航海時間差(19)式を用いて総燃料消費量(22)式を変形、かつ、高次の微小項を省略すると、波浪と潮流や海流を考慮した船舶運航の総燃料消費量（第二評価関数 J_2 ）が定式化される。

第二評価関数 J_2 は、各航路要素毎に操縦運動の状態量で構成される第一評価関数 J_{1i} をその一部に含む重構造を持つ。

$$J_{1i} = \int_0^\infty \left\{ \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2\alpha_i^3} + \frac{(m'_0 + m'_y)\beta}{C_{hi}} r' + C_{\delta i} \delta^2 \right\} dt' \quad (27)$$

$\Delta\psi$: 針路偏差

r : 回頭角速度 β : 横流れ角

δ : 操舵量（舵角）

m_0 : 質量 m_y : 付加質量（横方向）

C_h : 船体抵抗係数 C_δ : 舵抵抗係数

$$J_2 = \sum \left[\gamma_i C_{hi} U_i^2 \left(\frac{\zeta_{li}}{\alpha_i} + \alpha_i^2 L J_{1i} \right) \right] \quad (28)$$

U : 速力 L : 船体長

γ : 動力系の効率で補正された燃料消費率

第一評価関数 J_{1i} の被積分関数および積分変数の右肩の「 $'$ 」は無次元化操作を受けた量であることを示す。

因みに、第一評価関数(27)式の導出過程に合わせて、実航海と基準航海の時間差(19)式右辺の積分変数 t を無次元化処理し、(24)式を適用すると次式が得られる。

$$\Delta T^*_i = \frac{L}{\alpha_i U_i} \int_0^\infty \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt' \quad (29)$$

4.2 操舵制御最適化

操縦性能に關係する第一評価関数(27)式を基準とする最適化は、最適制御理論の最適レギュレータ問題として扱うことができる。

4.2.1 状態方程式

操縦運動の動特性を表す状態方程式は、無次元化された線形1次応答モデルの針路安定性指数（時定数） T_s' と旋回力指数 K_s' を用いて、行列形式で表すことができる³⁾。

$$\dot{x}'_m = A'_m x'_m + B'_m u'_m \quad (30)$$

$$x'_m = \begin{pmatrix} \Delta\psi \\ r' \end{pmatrix}$$

$$u'_m = \delta \quad (31)$$

$$A'_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_s'} \end{pmatrix}$$

$$B'_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_s'}{T_s'} \end{pmatrix}$$

また、横流れ角 β は、線形1次応答モデル(30)式と同等の精度で、回答角速度 r' と舵角 δ の線形結合によって近似することができる⁴⁾。

$$\beta = a'_\beta r' + b'_\beta \delta \quad (32)$$

4.2.2 評価関数

(27)式の第一評価関数 J_{1i} についても、状態方程式と同様に以下の通り行列形式で表すことができる。

$$J_{1i} = \int_0^\infty \left({}^t x'_m Q'_{mi} x'_m + 2 {}^t x'_m S'_{mi} u'_m + {}^t u'_m R'_{mi} u'_m \right) dt' \quad (33)$$

(33)式において、変数や係数行列の左肩の「 t 」は転置行列を示す。

横流れ速度の近似式(32)を(27)式に適用すると、第一評価関数(33)式の被積分関数の係数行列が得られる。

$$Q'_{mi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha_i^3} & -\frac{1}{2\alpha_i^3} a'_\beta \\ -\frac{1}{2\alpha_i^3} a'_\beta & a'_\beta \left\{ \frac{1}{2\alpha_i^3} a'_\beta + \frac{m'_0 + m'_y}{C_{hi}} \right\} \end{pmatrix}$$

$$S'_{mi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\alpha_i^3} b'_\beta \\ \frac{1}{2} b'_\beta \left\{ \frac{a'_\beta}{\alpha_i^3} + \frac{m'_0 + m'_y}{C_{hi}} \right\} \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$R'_{m_i} = \frac{1}{2\alpha_i^3} b'_\beta{}^2 + \frac{C_{\delta_i}'}{C_{h_i}}$$

$$x'_{m_i}(0) = \begin{pmatrix} \Delta\psi_i(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

これらの状態量やパラメータは全て無次元化されていて船速 U_i には依存しないが、舵抵抗係数 C'_δ は自然減速係数 α_i の関数となる。また、第一評価関数値 J_{1i} は係数行列(34)に含まれる自然減速係数 α_i を通して速力 U_i の関数となっているため、その最適化処理は第二評価関数の最適化処理結果の影響を受ける。

4.2.3 最適レギュレータ問題の求解

状態方程式(30)式と評価関数(33)式で与えられる最適制御問題の最適解は、最適レギュレータ理論によりフィードバック制御として与えられる³⁾。

$$u'_m = -K'_{f_i} x'_m \quad (35)$$

$$K'_{f_i} = R'_{m_i}{}^{-1} ({}^t B'_m P'_{m_i} + {}^t S'_{m_i}) \quad (36)$$

P'_{m_i} は以下のリッカチの方程式の解行列である。

$$\begin{aligned} & (P'_{m_i} B'_m + S'_{m_i}) R'_{m_i}{}^{-1} ({}^t B'_m P'_{m_i} + {}^t S'_{m_i}) \\ & - P'_{m_i} A'_m - {}^t A'_m P'_{m_i} - Q'_{m_i} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

一方、有次元のフィードバック係数行列 K_{fi} は、有次元化行列 Λ_i を用いて次式で与えられる。

$$K_{fi} = (k_1 \quad k_2) = K'_{f_i} \Lambda_i \quad (38)$$

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{L}{\alpha_i U_i} \end{pmatrix} \quad (39)$$

また、第一評価関数の最適値は、航路要素 $\Delta\sigma_i$ における x'_m の初期値 $x'_{m_i}(0)$ を用いて、

$$J_{1i}{}^{opt} = {}^t x'_{m_i}(0) P'_{m_i} x'_{m_i}(0) \quad (40)$$

で与えられ、 $x'_{m_i}(0)$ は、航路要素 $\Delta\sigma_i$ の始点における変針角 $\Delta\psi_i(0)$ を用いて次式で与えられる。

(30)式に(35)式を代入すると

$$\dot{x}'_m = (A'_m - B'_m K'_{f_i}) x'_m \quad (42)$$

この最適フィードバック制御系の状態ベクトル x'_m の挙動は、遷移行列を用いて次式で与えられる。

$$x'_{m_i}(t') = e^{A'_{f_i} t'} x'_{m_i}(0) \quad (43)$$

$e^{A'_{f_i}}$: 遷移行列

$$A'_{f_i} = A'_m - B'_m K'_{f_i} \quad (44)$$

4.3 主機出力(速力)最適化

航路要素毎の最適速力は、総航海時間 T_v を拘束して航海の定時性を担保した上で、総燃料消費量(第二評価関数)を最小化することによって求められる。

$$\sum T^*_{T_i} = \sum (T^{\#}_{T_i} + \Delta T^*_{T_i}) = \sum \frac{\zeta_i l_i + l_j T_{T_i}}{\alpha_i U_i} = T_v \quad (45)$$

T_v : 総航海時間(拘束条件)

但し、(45)式の J_{T_i} は(29)式の積分項で、無次元化されているため速力 U_i には依存しない。

$$J_{T_i} = \int_0^\infty \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt' \quad (46)$$

状態量 X の速力 U による偏微分を

$$X_U \equiv \frac{\partial X}{\partial U} \quad (47)$$

と表記して、(28)式に λ を未定係数とするラグランジュの未定係数法を適用することにより、最適速力 U_i の決定方程式が、(45)式と合わせた $(n+1)$ 元連立方程式として以下の通り導かれる。

$$\begin{aligned}
& \{C_{h_i}[\alpha_i(\gamma_{U_i}U_i + 3\gamma_i) - \gamma_i(1 - \Delta U_{U_i})]\zeta_i l_i \\
& \quad + \alpha_i^3\{\gamma_{U_i}\alpha_i U_i + 2\gamma_i(1 - \Delta U_{U_i})\}LJ_{1_i}^{opt} \\
& \quad + \gamma_i\alpha_i U_i(\zeta_{U_i}l_i + \alpha_i^3LJ_{1_i}^{opt})] \\
& \quad + C_{h_{U_i}}\gamma_i\alpha_i U_i(\zeta_i l_i + \alpha_i^3LJ_{1_i}^{opt})\}U_i^3 \\
& = \{(1 - \Delta U_{U_i})(\zeta_i l_i + LJ_{T_i}) - \alpha_i U_i \zeta_{U_i} l_i\} \lambda \quad (48)
\end{aligned}$$

ΔU_{U_i} は波浪下の自然減速量 ΔU の速力 U による偏微分で、自然減速量 ΔU_i および自然減速係数 α_i は、萩原ら⁵⁾の式で与えられる。

$$\Delta U_i = m(P_{s_i})f(h_i)g(\chi^*_i) \quad (49)$$

$$m(P_{s_i}) = a_m P_{s_i} + b_m$$

$$f(h_i) = a_f \{1 - \exp(b_f h_i^c)\}$$

$$g(\chi^*_i) = 1 - a_g \{1 - \exp(b_g |\chi^*_i|^c)\}$$

P_{s_i} : 主機出力

h_i : 有義波高

χ^*_i : 潮流や海流に基づく針路補正後の相対波向 ($-\pi < \chi^*_i \leq \pi$)

$$\alpha_i = 1 - \frac{\Delta U_i}{U_i} \quad (50)$$

4.4 実航海の主機出力 (制動馬力)

燃料消費量を示す(9)または(22)式において、

$$\gamma_o(P_{s_i}^*) = 1 \quad (51)$$

$$\gamma = \frac{1}{\eta_i \eta_p} \quad (52)$$

とおくと、第二評価関数(28)式はエネルギー消費量を表す。したがって、航路要素 $\Delta \sigma_i$ において最適化されたエネルギー消費量 E^*_i は次式で与えられる。

$$E^*_i = \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^2 \left(\frac{\zeta_i l_i}{\alpha_i} + \alpha_i^2 LJ_{1_i}^{opt} \right) \quad (53)$$

(53)式を実航海における航路要素 $\Delta \sigma_i$ の航海時間 T^*_i で除算し、(3)、(25)、(29)および(46)式を適用することによって、主機出力 (制動馬力) $P_{s_i}^*$ が得られる。

$$\begin{aligned}
P_{s_i}^* &= \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^2 \left(\frac{\zeta_i l_i}{\alpha_i} + \alpha_i^2 LJ_{1_i}^{opt} \right) / T^*_i \\
&= \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^2 \left(\frac{\zeta_i l_i}{\alpha_i} + \alpha_i^2 LJ_{1_i}^{opt} \right) / (T^*_i + \Delta T^*_i) \\
&= \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^3 \left(1 + \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} LJ_{1_i}^{opt} \right) / \left(1 + \frac{1}{\zeta_i l_i} LJ_{T_i} \right) \quad (54)
\end{aligned}$$

尚、航海最適化の結果得られる実航海の主機出力(54)式と(13)式の整合性を付章2で検証する。

5. 運航条件に対応した航海最適化技術

潮流や海流、主機の能力限界や危険回転域および荒天時の運航限界など、実航海で遭遇する事態に対処可能な航海最適化技術について、ペナルティ法¹⁾を用いて考察する。

(48)式左辺の U_i^3 の係数を F_{b_i} 、右辺の λ の係数を G_{c_i} とおくと、決定方程式(48)は次式のように表される。

$$F_{b_i} U_i^3 = G_{c_i} \lambda \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
F_{b_i} &= C_{h_i} [\{\alpha_i(\gamma_{U_i}U_i + 3\gamma_i) - \gamma_i(1 - \Delta U_{U_i})\}\zeta_i l_i \\
& \quad + \alpha_i^3\{\gamma_{U_i}\alpha_i U_i + 2\gamma_i(1 - \Delta U_{U_i})\}LJ_{1_i}^{opt} \\
& \quad + \gamma_i\alpha_i U_i(\zeta_{U_i}l_i + \alpha_i^3LJ_{1_i}^{opt})] \\
& \quad + C_{h_{U_i}}\gamma_i\alpha_i U_i(\zeta_i l_i + \alpha_i^3LJ_{1_i}^{opt}) \quad (56)
\end{aligned}$$

$$G_{c_i} = (1 - \Delta U_{U_i})(\zeta_i l_i + LJ_{T_i}) - \alpha_i U_i \zeta_{U_i} l_i \quad (57)$$

(55)、(45)式からなる $(n+1)$ 元連立方程式は、波浪条件や総航海時間の指定によっては、最適速力として、一部または全ての航路要素で、主機の能力や運航限界速力²⁾対応の主機出力を超える解、或いは、危険回転域内の解を与える可能性がある。これらの危険運転域と安全運転域の主機出力の境界値を P_{sbnd_i} として、安全確保未達の度合いに応じたペナルティ関数

$$F_{p_i} = \begin{cases} 0 & (P^*_i \in [\text{安全運転域}]) \\ \frac{\frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} G_{c_i} \lambda \left(1 + \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} LJ_{1_i}^{opt} \right)}{P_{sbnd_i} \left(1 + \frac{1}{\zeta_i l_i} LJ_{T_i} \right)} - F_{b_i} & (P^*_i \in [\text{危険運転域}]) \end{cases} \quad (58)$$

を導入し、(55)式を、その一部にペナルティを付加した以下の決定方程式に置き替える。

$$(F_{bi} + F_{pi})U_i^3 = G_{ci}\lambda \quad (59)$$

(59)式と(45)式からなる $(n + 1)$ 元連立方程式が、新たな決定方程式である。

尚、未定係数 λ の値は、(17)、(45)および(59)式を用いて反復計算によって収束させる。

また、(58)式の危険運転域対応のペナルティ関数は(54)式と(59)式から導かれる。

6. 大域的収束計算

(59)式と(45)式からなる $(n + 1)$ 元連立方程式は、 F_{bi} 、 F_{pi} 、 G_{ci} にも、速力 U_i を含む非線形の方程式である。したがって、求解には反復計算によって解を収束させる手法を用い、以降、この処理を大域的収束計算²⁾と呼ぶ。

決定方程式の求解の各過程において収束途中の解が危険運転域内にある場合には、(58)式で示される境界値からの乖離の大きさに応じたペナルティが課され、大域的収束計算の次のサイクルの反復計算に供される。その結果、ペナルティそのものも反復計算の過程の中で収束させることができる。

尚、反復計算の過程で主機出力の解が危険運転域内にあつて境界値 P_{sbndi} に置き替えられた場合は、速力 U_i は、 C_{hi} 、 α_i 、 ζ_i 、 J_{1i}^{opt} が速力 U_i に依存することに留意して次式から逆算しなければならない。

$$\frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{hi} U_i^3 \left(1 + \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L J_{1i}^{opt}\right) / \left(1 + \frac{1}{\zeta_i l_i} L J_{T_i}\right) = P_{sbndi} \quad (60)$$

決定方程式(59)に示す微調整の結果、これらの方程式から導かれた速力 U_i は、第二評価関数(総燃料消費量)を最小化するという本来の目的に対しては、最適解ではなく準最適解となることに注意を要する。

7. 数値シミュレーション

本研究で得られる厳密な最適解(操舵制御、主機出力制御および針路の潮流補正)の優位性を確認するために、先行研究の最適解に従って運航した場合と、燃料消費量および操作量の比較を行った。

計算は倍精度浮動小数点で行い、収束計算における収束判定基準は全て「相対誤差 10^{-8} 未満」とした。

7.1 シミュレーション条件

7.1.1 供試船と供試航路

供試船と供試航路は先行研究と同様、SR108一軸コンテナ船と北太平洋航路とした。

Table 1 に供試船の主要目^{6),7)}を、また、Table 2 に航路と(第一)波浪条件を示す。尚、海流については先行研究と同様、流向が航路との流向偏差30度の順方向で0.2ktの流速とした²⁾。

7.1.2 オペレーション上の制約条件

航海の制約条件として以下の6ケースについて、総燃料消費量と危険運転防止のための操舵制御ゲイン、主機出力調整および針路の潮流補正值を計算し、比較した。

- (1) ケース1 : 波浪下(安全運転域内)
- (2) ケース2 : 波浪と海流下(安全運転域内)
- (3) ケース3 : 主機出力超過防止
- (4) ケース4 : 危険回転域回避
- (5) ケース5 : 運航限界速力超過防止
- (6) ケース6 : 複合条件(運航限界速力対応の主機出力が危険回転域内)

Table 1 コンテナ船主要目

要素	アイテム	記号	単位	値
船体	船長	L	m	175.00
	船幅	B	m	25.40
	吃水	d	m	9.500
	排水容積	∇	m ³	24,154
	ブロック係数	C _b	-	0.572
舵	舵面積	A _r	m ²	33.0376
	舵高	H _r	m	7.7583
	アスペクト比	λ	-	1.8219
プロペラ	直径	D	m	6.533
	ピッチ	p		1.009
	ブレード数			5
動力系統	サビズ速力	U _s	kt	22.5
	主機出力(MCR)	P _{mc}	ps	27,500

Table 2 航路および第一波浪条件

航路要素	変針角 (deg)	航程 (ml)	有義波高 (m)	相対波向 (deg)	流速 (kt)	相対流向 (deg)
房総沖	0.0	568.0	1	150	0.2	30
1	6.4	500.1	4	-45	0.2	30
2	6.9	452.0	2	-170	0.2	30
3	7.2	421.0	1	80	0.2	30
4	7.4	405.2	3	30	0.2	30
5	7.4	403.3	4	120	0.2	30
6	7.4	415.1	5	160	0.2	30
7	7.3	441.6	4	-135	0.2	30
8	7.0	484.7	2	-90	0.2	30
9	2.0	447.0	3	60	0.2	30
S.F. 沖						
計		4538.1				

運航限界速力については、北沢ら⁶⁾が、SR108一軸コンテナ船を対象に、船首部海水打ち込み、横揺れ、波浪縦曲げモーメントなど7項目について、波浪条件と船速の組合せで船体の挙動を分析し、鋼船規則などを基準とした過大な船体応答の発現確率に基づいて、安全航行のための船速域を示した。この研究結果に基づいた近似式を萩原ら⁵⁾が提案している。

$$U_i = U_{noli} \quad (U_i^\# = \alpha_i U_i > U_{noli}^\#) \quad (61)$$

$$U_{noli}^\# = \alpha_{noli} U_{noli} = e^{a_v(q_{vi}-h_i)^{b_v}} + r_{v_i} \quad (62)$$

$$q_{v_i} = a_q + b_q |\chi_i^\#|^{c_q}$$

$$r_{v_i} = a_r + b_r |\chi_i^\#|^{c_r}$$

h_i : 有義波高

α_{noli} : 運航限界速力対応の自然減速係数

$\chi_i^\#$: 潮流や海流に対処する針路補正後の相対波向

各ケースの試算の基礎となる制約条件の有無を、Table 3 に具体的に示す。
尚、各ケースを成り立たせるために、先行研究と同

様、航海条件の一部として、それぞれ Table 4 に示す個別の条件を設定した。

Table 4 各ケース個別条件

ケース	航海時間 (hr)	危険回転域		波浪(航路要素5)	
		下端	上端	有義波高	相対波向
1	204.0	41.0%	42.0%	Table 2 の通り	
2	208.0	41.0%	42.0%	Table 2 の通り	
3	193.0	41.0%	42.0%	Table 2 の通り	
4	262.0	41.0%	42.0%	Table 2 の通り	
5	204.0	41.0%	42.0%	6.0m	0°
6	204.0	68.0%	69.0%	6.0m	0°

7.2 航海最適化の比較方法

航海最適化（操舵制御、主機出力調整、針路補正）の解は、本研究と先行研究それぞれの解法の第一評価関数と第二評価関数に基づいて個別に求められるが、その比較評価は共通の基準に基づくべきである。

第一評価関数は解法によって係数行列が異なるため、それぞれ(40)式で与えられる最適値をそのまま用いることができない。したがって、各解法の比較評価においては、精度重視の観点から、本研究でより厳密に定

Table 3 シミュレーションの制約条件

ケース	運転条件	試験条件				
		波浪	潮流(海流)	主機能力限界	危険回転	運航限界速力
1	波浪	有	無	無	無	無
2	波浪&潮流	有	有	無	無	無
3	主機能力制限	有	有	有	無	無
4	危険回転域	有	有	有	有	無
5	運航限界	有	有	無	無	有
6	複合(危険回転域&運航限界)	有	有	無	有	有

式化した(34)式を非積分関数の係数行列として用いる。

特に、第一評価関数最適値の計算には(33)式に(35)式と(43)式を適用して変形した次式を用いる。

$$J_{1i}^{opt} = \int_0^{\infty} \{ {}^t x'_{m_i}(0) e^{A'_{f_i} t'} (Q_{m_i} - 2S'_{m_i} K'_{f_i} + {}^t K'_{f_i} R'_{m_i} K'_{f_i}) e^{A'_{f_i} t'} {}^t x'_{m_i}(0) \} dt' \quad (63)$$

また、航海全体の総燃料消費量の評価についても、より厳密な解析に基づく第二評価関数(28)式を用いた。

$$J_2^{opt} = \sum \left[\gamma_i C_{h_i} U_i^{opt2} \left(\frac{\zeta_i l_i}{\alpha_i} + \alpha_i^2 L J_{1i}^{opt} \right) \right] \quad (64)$$

さらに、4.2.3節で解を得た最適操舵が実行される場合、(46)式の J_{T_i} は以下の要領で計算することができる。

$$J_{T_i} = \int_0^{\infty} \{ {}^t x'_{m_i}(0) e^{A'_{f_i} t'} (Q'_{T_i} - 2S'_{T_i} K'_{f_i} + {}^t K'_{f_i} R'_{T_i} K'_{f_i}) e^{A'_{f_i} t'} {}^t x'_{m_i}(0) \} dt' \quad (65)$$

$$Q'_{T_i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} a'_{\beta} \\ -\frac{1}{2} a'_{\beta} & \frac{1}{2} a'^2_{\beta} \end{pmatrix}$$

$$S'_{T_i} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} b'_{\beta} \\ \frac{1}{2} a'_{\beta} b'_{\beta} \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$R'_{T_i} = \frac{1}{2} b'^2_{\beta}$$

7.3 シミュレーション結果と考察

Table 5 に、ケース1～6で本研究と先行研究¹⁾で最適化された航海の総燃料消費量を並記する。

また、Table 6 には、ケース5の場合の両研究の針路の潮流補正值、主機出力制御および操舵制御ゲインを示す。

- (1) Table 5 では、ケース1～6の全てにおいて、先行研究に比べ本研究の省燃費効果が0.002～0.004%改善されている。
- (2) しかしながら、その差は僅少で、航路要素 $\Delta\sigma_i$ における推進運動の仕事量を基本とした先行研究でも実用的には問題ないことを示唆している。
- (3) Table 6 から、最適な航海を実行するための操作量(針路補正、主機出力、操舵制御ゲイン)が両研究で異なることが明らかである。

尚、総航海時間の指定値に対する誤差率は、最大でも0.0005%未満であった。

7.4 シミュレーション結果の有意性の検証

航海最適化の求解には、大域的収束計算の各収束過程に重畳して主機能力の限界に対処するための速力逆算や運航限界速力の計算等、複数の局所的な収束計算が含まれる。その結果、計算量が膨大となるため、丸め誤差等の数値計算上の誤差が累積される可能性があり、その影響を評価する必要がある。

また、数値シミュレーション結果は、波浪条件等、特定の就航条件の下で試算されているため、従来の研究に対する燃料消費量の改善度の一般的な有意性を検証しなければならない。

数値計算に伴う誤差については、収束判定条件を

Table 5 ケーススタディ結果 (第一波浪条件)

ケース	運転条件	燃料消費量 (ton) : 第一波浪条件		
		本研究結果 (N)	先行研究結果 (O)	改善度 [(N-O)/O]
1	波浪	580.975	580.997	-0.0038%
2	波浪&潮流	549.521	549.540	-0.0035%
3	主機能力制限	630.119	630.139	-0.0032%
4	危険回転域	387.152	387.160	-0.0020%
5	運航限界	601.952	601.974	-0.0037%
6	複合 (危険回転域&運航限界)	602.098	602.120	-0.0037%

Table 6 操船制御データ (ケース5)

航路要素	厳密解(燃料消費量: 601.952 ton)				従来解(燃料消費量: 601.974 ton)			
	針路補正 (deg)	主機出力 (BHP:ps)	操舵制御 δ (有次元)		針路補正 (deg)	主機出力 (BHP:ps)	操舵制御 δ (有次元)	
			比例(k1)	微分(k2)			比例(k1)	微分(k2)
房総沖(0)	-0.253	23906	0.195	9.836	-0.252	24089	0.195	9.809
1	-0.249	27470	0.203	9.758	-0.251	27119	0.199	9.738
2	-0.253	24035	0.196	9.834	-0.252	24198	0.196	9.807
3	-0.253	23925	0.196	9.836	-0.252	24106	0.195	9.809
4	-0.251	25987	0.200	9.788	-0.251	25790	0.198	9.774
5	-0.340	18749	0.251	14.130	-0.340	18749	0.225	13.437
6	-0.251	25645	0.199	9.798	-0.252	25517	0.197	9.780
7	-0.252	24899	0.198	9.817	-0.252	24913	0.197	9.794
8	-0.253	24115	0.196	9.833	-0.252	24265	0.196	9.806
9	-0.252	25231	0.198	9.809	-0.252	25183	0.197	9.788
S.F.沖(10)								

10^{-8} から 10^{-12} に変更して 7.1 節 および 7.2 節と同じ条件で数値シミュレーションを行い、各ケースの誤差率と大域的収束計算の反復回数を Table. 7 に記した。

一方、就航条件に対する有意性については、Table 8 に示す第二の波浪条件を設定して別途数値シミュレーションを行い、7.2 節と同様に、本研究と先行研究で最適化された航海の総燃料消費量を比較した。その結果を Table 9 に示す。

- (1) Table 7 より、収束判定条件を厳しくした場合、大域的収束計算の反復回数は 1.5 ~ 2.5 倍に増大しているが、燃料消費量の誤差率は 10^{-10} のオーダーで、実質的に数値計算上の誤差の影響はないことが明らかである。
- (2) Table 9 より、Table 8 の第二波浪条件下でも、ケース 3 を除いて、先行研究に対する本研究の改善度は第一波浪条件の場合と同様、百分率で

10^{-3} のオーダーとなっていることが分かる。

- (3) ケース 3 ではこの値が 10^{-4} とさらに 1 オーダー小さいが、このケースでは本研究と先行研究の両方で、同じ 3 つの航路要素の主機出力が主機の能力を超過してその最大値に抑えられた。

Table 8 第二波浪条件

航路要素	変針角 (deg)	航程 (ml)	有義波高 (m)	相対波向 (deg)
房総沖	0.0	568.0	3	-65
1	6.4	500.1	2	100
2	6.9	452.0	4	-25
3	7.2	421.0	5	-135
4	7.4	405.2	4	175
5	7.4	403.3	3	-95
6	7.4	415.1	1	-55
7	7.3	441.6	2	10
8	7.0	484.7	4	55
9	2.0	447.0	1	-155
S.F.沖				
計		4538.1		

Table 7 誤差率および反復回数

ケース	運転条件	第一波浪条件	
		誤差率	反復回数比率
1	波浪	-2.709E-10	1.583
2	波浪&潮流	-2.141E-10	1.545
3	主機能力制限	1.180E-10	1.609
4	危険回転域	-2.192E-10	1.500
5	運航限界	-8.437E-10	2.469
6	複合(危険回転域&運航限界)	-1.969E-10	1.625

Table 9 ケーススタディ結果 (第二波浪条件)

ケース	運転条件	燃料消費量(ton) : 第二波浪条件		
		本研究結果(N)	先行研究結果(O)	改善度 [(N-O)/O]
1	波浪	585.217	585.244	-0.0047%
2	波浪&潮流	553.810	553.844	-0.0062%
3	主機能力制限	634.389	634.391	-0.0003%
4	危険回転域	391.819	391.835	-0.0041%
5	運航限界	606.746	606.763	-0.0029%
6	複合 (危険回転域&運航限界)	606.892	606.909	-0.0029%

その結果、主機出力最適化の対象が残りの航路要素に限定され、最適化の自由度が制限されたことが原因と思われる。

以上の結果、本研究の成果の特定の就航条件への依存性は小さいと考えられる。

8. まとめ

国際的に議論が活発化している地球環境問題への海運界の取り組みの一環として、先行研究^{1)~4)}で海上輸送における大気汚染防止のために燃料消費量を最小化する航海制御技術の開発を進めてきた。

これらの研究では、目的地までの航路を構成する航路要素において、波浪の有無に関係なく推進運動の仕事量が同じ主機の運転状態に基づいて、波浪中の自然減速係数と波浪抵抗の関係を定量化し、解析の基礎とした。

本研究では、完全静水中と波浪中で、出力が同じ主機の運転状態に基づいて自然減速係数と波浪抵抗の関係を明らかにし、目的地までに消費される総燃料消費量を最小化するための航海最適化技術の改良に取り組んだ。その結果、航海の評価基準が見直され、操舵制御と主機出力制御の最適解を与える改良型の決定方程式が導かれた。

さらに、SR108一軸コンテナ船と北太平洋航路をモデルとして種々のオペレーション条件に基づく数値シミュレーションを行い、本研究と先行研究の成果を比較することによって航海最適化技術改良の効果を検証した。

数値シミュレーションの結果、試行した全てのケースで、本研究の航海最適化によって燃料消費が改善さ

れることが明らかとなったが、その差は僅少で、先行研究の成果も実用上は同等との結論を得た。

しかしながら、船種やサイズ、航路、就航条件、運転状態等、航海の現場の多様性を考えると、実船に航海最適化技術を適用する場合には、より厳密な解析に基づく本研究の成果を活用すべきと考える。

参考文献

- 1) 金丸：オペレーション上の制約未達にペナルティを課す船舶の航海最適化問題の解法、長崎総合科学大学紀要 (2018) 第58巻、第2号 p.107-114
- 2) 金丸：実航海の自然条件や動力系の制約に対処可能な船舶の航海最適化技術、長崎総合科学大学紀要 (2018) 第58巻、第1号 p.55-65
- 3) 金丸：船舶の航海最適化技術の精密化とオンボード航海支援装置への適用のための処理効率化、長崎総合科学大学紀要 (2017) 第57巻、第1号 p.45-60
- 4) 金丸：船舶の一航海省燃費評価基準とその階層構造、日本造船学会論文集、第168号 (1990) p.597-603、
- 5) 萩原、巻島：最適航路に関する考察、日本航海学会論文集 (1980) 62号 p.77-88
- 6) 北沢、黒井、高木：コンテナ船の波浪中での限界速度、日本造船学会論文集、第138号 (1975) p.269-276
- 7) 孫、野本：高速コンテナ船の操縦運動と横揺れの連成挙動について、日本造船学会論文集、第150号 (1981) p.232-244

付章 1 実航海と基準航海の時間差

実航海において、 $x-y$ 平面上で、船速 $U^\#$ で航走する船舶の設定針路の向きに x 軸をとると、時刻 t における船位の座標 $(x(t), y(t))$ は次式で表される。

$$x(t) = \int_0^t U^\# \cos(\Delta\psi - \beta) dt + x(0) \quad (67)$$

$$y(t) = \int_0^t U^\# \sin(\Delta\psi - \beta) dt + y(0) \quad (68)$$

また、基準航海の航程は次式で与えられる。

$$l^\# = \int_0^{T^*} U^\# \cos(\Delta\psi - \beta) dt \quad (69)$$

一方、(26)式を考慮すると、実航海の航程は、操縦運動に伴う航跡に基づいて以下の通り計算される。

$$\begin{aligned} l^* &= \int_0^{l^\#} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{T^*} U^\# \cos(\Delta\psi - \beta) \sqrt{1 + \{\tan(\Delta\psi - \beta)\}^2} dt \\ &\approx \int_0^{T^*} U^\# \cos(\Delta\psi - \beta) \left[1 + \frac{1}{2}\{\tan(\Delta\psi - \beta)\}^2\right] dt \\ &\approx l^\# + U^\# \int_0^{T^*} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \end{aligned} \quad (70)$$

したがって、実航海と基準航海の時間差 ΔT^* は

$$\Delta T^* = T^* - T^\# = \frac{l^* - l^\#}{U^\#} = \int_0^{T^* + \Delta T^*} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \quad (71)$$

平均値の定理により、

$$\begin{aligned} \Delta T^* &= \int_0^{T^*} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt + \int_{T^*}^{T^* + \Delta T^*} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \\ &= \int_0^{T^*} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt + \left[\frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} \right]_{t=T^*}^{t=T^* + \mu\Delta T^*} \Delta T^* \quad (72) \\ &\quad (0 < \mu < 1) \end{aligned}$$

再び(26)式を適用することによって(19)式が導かれる。

$$\begin{aligned} \Delta T^* &= \frac{1}{1 - \left[\frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} \right]_{t=T^*}^{t=T^* + \mu\Delta T^*}} \int_0^{T^*} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \\ &\approx \int_0^{T^*} \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt \end{aligned} \quad (73)$$

付章 2 実航海の主機出力に関する考察

数値シミュレーションにより、

$$\frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L J_{1i}^{opt} \ll 1 \quad (74)$$

$$\frac{1}{\zeta_i l_i} L J_{Ti} \ll 1 \quad (75)$$

という知見が得られた。この特徴は、(26)式 および一般に航路要素長 l_i が船体の長さ L より十分大きいことからも見ることが出来る。加えて、微小項の積を省略することにより、(54)式から次式が得られる。

$$\begin{aligned} P_{s^*i} &= \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{hi} U_i^3 \left(1 + \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L J_{1i}^{opt}\right) / \left(1 + \frac{1}{\zeta_i l_i} L J_{Ti}\right) \\ &\approx \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{hi} U_i^3 \left(1 + \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L J_{1i}^{opt}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta_i l_i} L J_{Ti}\right) \\ &\approx \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{hi} U_i^3 \left(1 + \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L J_{1i}^{opt} - \frac{1}{\zeta_i l_i} L J_{Ti}\right) \end{aligned} \quad (76)$$

(27)式と(29)式を用い、航路要素 $\Delta\sigma_i$ 上では自然減速係数 α_i が定数であることを考慮して(76)式 () 内の第2項と第3項の減算を進めると、

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L J_{1i}^{opt} - \frac{1}{\zeta_i l_i} L J_{Ti} \\ &= \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L \int_0^\infty \left\{ \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2\alpha_i^3} + \frac{(m'_0 + m'_y)\beta r' + C_{\delta_i'} \delta'^2}{C_{h_i'}} \right\} dt' \\ &\quad - \frac{1}{\zeta_i l_i} L \int_0^\infty \frac{(\Delta\psi - \beta)^2}{2} dt' \\ &= \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i l_i} L \int_0^\infty \left\{ \frac{(m'_0 + m'_y)\beta r' + C_{\delta_i'} \delta'^2}{C_{h_i'}} \right\} dt' \end{aligned} \quad (77)$$

積分項を有次元化し、(77)式を用いて、かつ、航路要素における航海時間が操縦運動の時定数より十分大きいという特性に基づいて、(24)式で ∞ とした積分区間の上限を $T_i^\#$ に戻した上で(25)式を適用すると、(76)式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} P_{s^*i} &= \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^3 \left[1 + \frac{\alpha_i^3}{\zeta_i} L \int_0^\infty \left\{ \frac{(m'_0 + m'_y) \beta r' + C_{\delta_i'} \delta'^2}{C_{h_i'}} \right\} dt' \right] \\ &\approx \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^3 \left[1 + \frac{\alpha_i^3}{T_i^\#} \int_0^{T_i^\#} \left\{ \frac{(m_0 + m_y) \beta r / U_i^\# + C_{\delta_i^\#} \delta^2}{C_{h_i}} \right\} dt \right] \end{aligned} \quad (78)$$

(14)式を適用し、さらに、航路要素 $\Delta\sigma_i$ では、船速 $U_i^\#$ や船体抵抗係数 $C_{h_i}^\#$ 、波浪抵抗 R_{w_i} が定数であることを考慮すると、(78)式を次式の通り変形することができる。

$$\begin{aligned} P_{s^*i} &= \frac{1}{T_i^\# \eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^3 T_i^\# \\ &\quad + \frac{1}{T_i^\#} \int_0^{T_i^\#} \frac{1}{\eta_i \eta_p} C_{h_i} U_i^\# \left\{ \frac{(m_0 + m_y) \beta r / U_i^\# + C_{\delta_i^\#} \delta^2}{C_{h_i}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{T_i^\#} \int_0^{T_i^\#} \frac{1}{\eta_i \eta_p} \{ (C_{h_i}^\# U_i^\#)^3 + R_{w_i} U_i^\# \} \\ &\quad + (m_0 + m_y) U_i^{\#2} \beta r + C_{\delta_i^\#} U_i^{\#3} \delta^2 \} dt \\ &= \frac{1}{T_i^\#} \int_0^{T_i^\#} \frac{1}{\eta_i \eta_p} \{ C_{h_i}^\# U_i^{\#3} + (m_0 + m_y) U_i^{\#2} \beta r \\ &\quad + C_{\delta_i^\#} U_i^{\#3} \delta^2 + R_{w_i} U_i^\# \} dt \end{aligned} \quad (79)$$

(79)式は、(54)式の P_{s^*i} が主機出力(13)式を航路要素 $\Delta\sigma_i$ 上で平均化した値(馬力)であることを示す。